gli esercizi di McGraw-Hill

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana
Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

MECCANICA DEI FLUIDI

III EDIZIONE

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

CAPITOLO

12

Mc Graw Hill Education

CAPITOLO

12

MOTO DEI FLUIDI COMPRIMIBILI

SOMMARIO

Nello studio del moto di un fluido ad alta velocità è necessario tener conto della sua comprimibilità. Ciò è particolarmente vero nel caso dei gas. In tale tipo di problemi vengono abitualmente chiamate *grandezze di ristagno* i valori che le grandezze (pressione, densità, temperatura ...) assumono quando il fluido subisce un completo arresto con una trasformazione adiabatica. Nel caso frequentissimo in cui le variazioni di energia potenziale sono trascurabili, tali grandezze coincidono con le *grandezze totali*. Per distinguerle da tali grandezze, quelle originali vengono chiamate *grandezze statiche*. In particolare, l'*entalpia di ristagno* è definita come

$$h_T = h + \frac{V^2}{2} \tag{12.1}$$

La *temperatura di ristagno* di un gas perfetto con calori specifici costanti è

$$T_T = T + \frac{V^2}{2c_p} \tag{12.5}$$

e rappresenta la temperatura raggiunta da un gas ideale che si arresta adiabaticamente. Le grandezze di ristagno sono legate alle grandezze statiche dalle relazioni

$$\frac{p_T}{p} = \left(\frac{T_T}{T}\right)^{k/(k-1)} \tag{12.7}$$

$$\frac{\rho_T}{\rho} = \left(\frac{T_T}{T}\right)^{1/(k-1)} \tag{12.8}$$

Una perturbazione infinitesima si propaga in un mezzo fluido con la stessa velocità con cui vi si propaga il suono. In un gas ideale avente costante R, temperatura T e rapporto tra i calori specifici k, la *velocità del suono* vale

$$c = \sqrt{kRT} \tag{2.41}$$

Il *numero di Mach* è il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nel fluido in quelle condizioni

$$\mathrm{Ma} = \frac{V}{c} \tag{2.42}$$

Un moto è definito *sonico* quando $\mathrm{Ma} = 1$; *subsonico* quando $\mathrm{Ma} < 1$; *supersonico* quando $\mathrm{Ma} > 1$; *ipersonico* quando $\mathrm{Ma} \gg 1$ e *transonico* quando $\mathrm{Ma} \cong 1$. Lo stato sonico viene chiamato anche *stato critico*; analogamente, vengono chiamate *grandezze critiche* i valori, contraddistinti da un asterisco, che le varie grandezze assumono per $\mathrm{Ma} = 1$.

Un ugello è un tronco di tubazione a sezione decrescente nel senso del moto (ugello *convergente*). La velocità massima che un fluido può raggiungere in un ugello convergente è la velocità del suono. Perché il fluido possa superare la velocità del suono è necessario che al tratto convergente segua un tratto a sezione crescente nel senso del moto (*divergente*). Un ugello a sezione prima decrescente nel senso del moto e poi crescente prende il nome di *ugello convergente-divergente*. La sezione di area minima è chiamata *gola* ed è quella in corrispondenza della quale la velocità del fluido è pari a quella del suono.

Il rapporto tra grandezze di ristagno e grandezze statiche in funzione del numero di Mach è

dato dalle relazioni

$$\frac{T_T}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) \mathrm{Ma}^2 \tag{12.19}$$

$$\frac{p_T}{p} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) \mathrm{Ma}^2\right]^{k/(k-1)} \tag{12.20}$$

$$\frac{\rho_T}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) \mathrm{Ma}^2\right]^{1/(k-1)} \tag{12.21}$$

Se al posto delle grandezze statiche si introducono le grandezze critiche si hanno i *rapporti critici*, che si ottengono dalle relazioni precedenti ponendo $\mathrm{Ma} = 1$. Si ottiene

$$\frac{T^*}{T_T} = \frac{2}{k+1} \tag{12.22}$$

$$\frac{p^*}{p_T} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{12.23}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_T} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \tag{12.24}$$

La pressione che vige nell'ambiente in cui sbocca un ugello è chiamata *contropressione*. Per tutti i valori di contropressione minori della pressione critica p^*, la pressione nella sezione di sbocco di un ugello convergente è pari a quella critica. In tali condizioni, si ha $\mathrm{Ma} = 1$, la portata di massa è massima e il flusso è soffocato.

Per un certo intervallo di valori della contropressione, in un fluido in moto supersonico (nel tratto divergente di un ugello convergente-divergente) si forma una *onda d'urto normale*, attraverso la quale il fluido subisce un brusco aumento di pressione e temperatura e una brusca diminuzione di velocità fino a valori subsonici. Attraverso tale onda, il moto è marcatamente irreversibile e, pertanto, non può essere considerato isoentropico.

Tra le grandezze a monte dell'onda (1) e quelle a valle (2) sussistono le relazioni

$$T_{T1} = T_{T2}$$

e

$$\mathrm{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}} \tag{12.38}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)} \tag{12.34}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k\,\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\,\mathrm{Ma}_2^2} = \frac{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}{k+1} \tag{12.37}$$

Tali relazioni valgono anche per un'onda obliqua, se il numero di Mach viene scritto usando la componente della velocità *normale* all'onda.

Il moto unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con scambi di calore e resistenze trascurabili prende il nome di *flusso di Rayleigh*. Nel flusso di Rayleigh, il fluido, tra una sezione in cui ha lo stato 1 e una in cui ha lo stato 2, scambia con l'esterno una quantità di calore

$$q_c = c_p\,(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = c_p\,(T_{T2} - T_{T1}) \tag{12.54}$$

Il moto unidimensionale adiabatico di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze non trascurabili prende il nome di *flusso di Fanno*. Nel flusso di Fanno, il fluido, partendo da una sezione in cui il numero di Mach ha il valore Ma, raggiunge lo stato sonico in una sezione posta a distanza L^* tale da soddisfare la relazione

$$\frac{\lambda_m L^*}{D_i} = \frac{1 - \mathrm{Ma}^2}{k\mathrm{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\mathrm{Ma}^2}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2} \tag{12.88}$$

in cui λ_m è l'indice di resistenza medio. La lunghezza L del tratto compreso tra due sezioni in cui il numero di Mach vale, rispettivamente, Ma_1 e Ma_2 deve soddisfare la relazione

$$\frac{\lambda_m L}{D_i} = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 \tag{12.89}$$

Nel flusso di Fanno, la temperatura di ristagno T_T si mantiene costante.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

SOLUZIONI

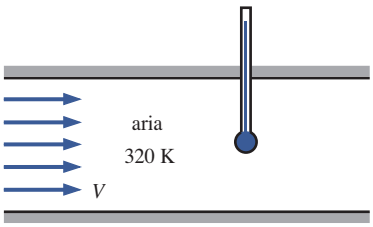
Grandezze di ristagno

12.1 Negli impianti di condizionamento dell'aria, per misurare la temperatura si utilizza una sonda inserita nella corrente. Poiché a contatto della sonda la velocità del fluido si annulla, la sonda misura, in realtà, la temperatura di ristagno. L'errore che si commette è un errore significativo?

Analisi No. L'errore che si commette non è un errore significativo, perché negli impianti di condizionamento dell'aria le velocità del fluido sono molto basse, per cui la temperatura statica e la temperatura di ristagno, che differiscono per il termine $V^2/2c_p$, sono praticamente coincidenti.

Discussione Se, invece, il moto dell'aria fosse stato supersonico, l'errore sarebbe stato significativo.

12.2 Una corrente di aria alla temperatura di 320 K defluisce in un condotto alla velocità di **(a)** 1, **(b)** 10, **(c)** 100 e **(d)** 1000 m/s. Determinare la temperatura misurata, nei vari casi, da una sonda posta all'interno del condotto.



Ipotesi Il processo di ristagno è isoentropico.

Proprietà Il valore del calore specifico a pressione costante è $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K).

Analisi La sonda misura la temperatura dell'aria che si arresta completamente, cioè la *temperatura di ristagno*. Per la 12.5, si ha

(a)

$$T_T = T + \frac{V^2}{2c_p} = 320 + \frac{1^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 320{,}00 \text{ K}$$

(b)

$$T_T = 320 + \frac{10^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 320{,}05 \text{ K}$$

(c)

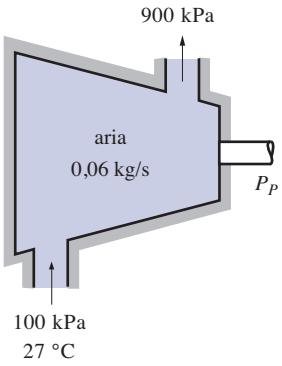
$$T_T = 320 + \frac{100^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 324,98 \text{ K}$$

(d)

$$T_T = 320 + \frac{1000^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 817{,}51 \text{ K}$$

Discussione A bassa velocità la temperatura di ristagno è praticamente identica alla temperatura statica. Per velocità elevate, la differenza tra i due valori diventa notevole.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.3 Aria alla pressione di ristagno di 100 kPa e alla temperatura di ristagno di 27 °C viene compressa isoentropicamente fino alla pressione di ristagno di 900 kPa. Calcolare la potenza assorbita dal compressore per una portata di 0,06 kg/s.

Ipotesi **1** Il moto dell'aria è isoentropico. **2** L'aria si comporta come un gas ideale.

Proprietà Il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 12.7, la temperatura di ristagno all'uscita del compressore è

$$T_{T2} = T_{T1}\left(\frac{p_{T2}}{p_{T1}}\right)^{(k-1)/k} = (273{,}2 + 27) \times \left(\frac{900}{100}\right)^{(1{,}4-1)/1{,}4} =$$

$$= 562{,}4 \text{ K}$$

Per la 12.10, trascurando le variazioni di energia potenziale e gli scambi di calore con l'esterno, il lavoro meccanico l_1 per unità di massa risulta

$$l_1 = c_p(T_{T2} - T_{T1}) = 1{,}005 \times (562{,}4 - 300{,}2) = 263{,}5 \text{ kJ/kg}$$

per cui, nell'ipotesi di rendimento unitario, la potenza P_P assorbita dal compressore per la portata $Q_m = 0{,}06$ kg/s è

$$P_P = Q_m l_1 = 0{,}06 \times 263{,}5 = 15{,}8 \text{ kW}$$

12.4 Una corrente d'aria in moto con una velocità di 570 m/s ha una pressione di ristagno di 0,6 MPa e una temperatura di ristagno di 400 °C. Calcolare la pressione statica e la temperatura statica.

Ipotesi **1** Il moto dell'aria è isoentropico. **2** L'aria si comporta come un gas ideale.

Proprietà Ad una temperatura media presunta di 600 K, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $c_p = 1{,}051$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}376$.

Analisi Per la 12.5, la temperatura statica è

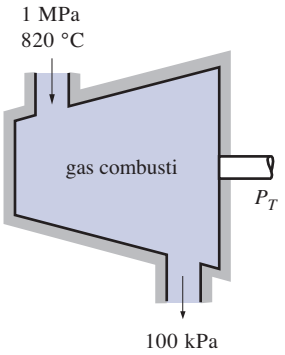
$$T = T_T - \frac{V^2}{2c_p} = (273{,}2 + 400) - \frac{570^2}{2 \times 1{,}051 \times 1000} = 518{,}6 \text{ K}$$

e la pressione statica, per la 12.7,

$$p = p_T\left(\frac{T}{T_T}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}6 \times \left(\frac{518{,}6}{673{,}2}\right)^{1{,}376/(1{,}376-1)} = 0{,}231 \text{ MPa}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.5 Gas combusti alla pressione di ristagno di 1,0 MPa e alla temperatura di ristagno di 820 °C si espandono isoentropicamente in una turbina fino alla pressione di ristagno di 100 kPa. Essendo $k = 1{,}33$ e $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), calcolare la potenza dalla turbina per unità di portata.



Ipotesi **1** Il processo di espansione è isoentropico. **2** I gas combusti si comportano come gas ideali.

Analisi Per la 12.7, la temperatura di ristagno all'uscita della turbina è

$$T_{T2} = T_{T1}\left(\frac{p_{T2}}{p_{T1}}\right)^{(k-1)/k} = (273{,}2 + 820) \times \left(\frac{100}{1000}\right)^{(1{,}33-1)/1{,}33} =$$
$$= 617{,}4 \text{ K}$$

Per la 12.18, il calore specifico a pressione costante è

$$c_p = \frac{kR}{k-1} = \frac{1{,}33 \times 0{,}287}{1{,}33 - 1} = 1{,}157 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$$

Per la 12.10, trascurando le variazioni di energia potenziale e gli scambi di calore con l'esterno, il lavoro meccanico per unità di massa vale

$$l_2 = c_p(T_{T1} - T_{T2}) = 1{,}157 \times (273{,}2 + 820 - 617{,}4) =$$
$$= 550{,}5 \text{ kJ/kg}$$

per cui, nell'ipotesi di rendimento unitario, la potenza P_T della turbina per la portata $Q_m = 1$ kg/s è

$$P_T = Q_m l_2 = 1 \times 550{,}5 = 550 \text{ kW}$$

Moto isoentropico unidimensionale

12.6 Nella sezione di sbocco di un ugello convergente la velocità è pari a quella del suono. Se, mantenendo inalterate le condizioni all'imbocco, si riduce ulteriormente l'area della sezione di sbocco, cosa accade **(a)** alla velocità e **(b)** alla portata?

Analisi

(a) La velocità allo sbocco rimane costante e uguale alla velocità del suono.

(b) La portata nell'ugello diminuisce perché diminuisce l'area della sezione trasversale allo sbocco.

Discussione In un convergente, la massima velocità allo sbocco è quella sonica. Per aumentare ulteriormente la velocità, si deve aggiungere un tratto divergente.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.7 Nel marzo 2004 la NASA ha provato con successo un velivolo dotato di un motore sperimentale a combustione supersonica (chiamato *scramjet*) che ha raggiunto il valore record di Mach 7. Se ha volato in aria alla temperatura di −20 °C, quale velocità ha raggiunto?

Ipotesi L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti.

Proprietà La costante dell'aria e il rapporto tra i calori specifici sono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi La velocità del suono, per la 2.41, è

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times (273{,}2 - 20)} = 319 \text{ m/s}$$

per cui la velocità raggiunta dal velivolo è

$$V = c\,\text{Ma} = 319 \times 7 = 2233 \text{ m/s} = 8040 \text{ km/h}$$

12.8 Un aereo di linea viaggia alla velocità di 920 km/h alla quota di 10 km, dove la temperatura dell'aria è di −50 °C. Il moto dell'aereo è subsonico o supersonico?

Ipotesi L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti.

Proprietà La costante dell'aria e il rapporto tra i calori specifici sono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi La velocità del suono, per la 2.41, è

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1{,}4 \times 287 \times (273{,}2 - 50)} = 299 \text{ m/s} =$$

$$= 1080 \text{ km/h}$$

e, pertanto, il numero di Mach risulta

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{920}{1080} = 0{,}85$$

Essendo Ma < 1, il moto dell'aereo è subsonico.

Discussione Gli aerei si mantengono sufficientemente lontani dalla velocità Mach 1 per evitare le instabilità associate alla condizione di moto transonico.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.9 Anidride carbonica in quiete alla pressione di 1200 kPa e alla temperatura di 600 K viene accelerata isoentropicamente fino a Mach 0,6. Determinare i valori raggiunti dalla pressione e dalla temperatura.

Ipotesi L'anidride carbonica si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici è $k = 1{,}288$.

Analisi L'anidride carbonica inizialmente è in quiete. Pertanto, la temperatura e la pressione di ristagno sono uguali ai valori iniziali, per cui $T_T = T_1 = 600$ K e $p_T = p_1 = 1200$ kPa. Per la 12.19, si ha

$$T = \frac{2T_T}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2} = \frac{2 \times 600}{2 + (1{,}288 - 1) \times 0{,}6^2} = 570 \text{ K}$$

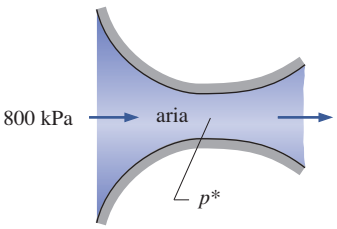
e, per la 12.7,

$$p = p_T \left(\frac{T}{T_T}\right)^{k/(k-1)} = 1200 \times \left(\frac{570}{600}\right)^{1{,}288/(1{,}288-1)} =$$

$$= 954 \text{ kPa}$$

Discussione All'aumentare della velocità, sia la pressione che la temperatura diminuiscono perché una parte dell'energia interna viene convertita in energia cinetica.

12.10 Qual è la pressione minima che può essere raggiunta in corrispondenza della gola di un ugello convergente-divergente da una corrente di aria che nella sezione di imbocco ha velocità trascurabile e pressione di 800 kPa?



Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto attraverso l'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici dell'aria è $k = 1{,}4$.

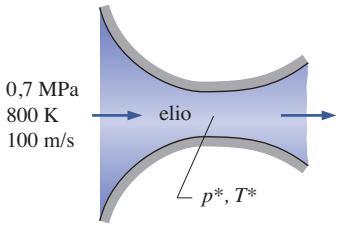
Analisi La pressione minima che può essere raggiunta in corrispondenza della gola è pari alla pressione critica p^*, che, per la 12.23, vale

$$p^* = p_T \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 800 \times \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} =$$

$$= 423 \text{ kPa}$$

Discussione Il valore calcolato è quello che la pressione assume in corrispondenza della gola quando il moto a valle di essa è supersonico.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.11 Quali sono la pressione minima e la temperatura minima che una corrente di elio a 0,7 MPa, 800 K e 100 m/s può raggiungere in corrispondenza della gola di un ugello convergente-divergente?

Ipotesi **1** L'elio si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto attraverso l'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà Il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $c_p = 5{,}1926$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}667$.

Analisi La pressione minima e la temperatura minima che possono essere raggiunte in corrispondenza della gola sono pari ai rispettivi valori critici p^* e T^*, a loro volta funzione dei valori di ristagno p_T e T_T. Per la 12.5, si ha

$$T_T = T + \frac{V^2}{2c_p} = 800 + \frac{100^2}{2 \times 5{,}1926 \times 1000} = 801 \text{ K}$$

e, per la 12.7,

$$p_T = p\left(\frac{T_T}{T}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}7 \times \left(\frac{801}{800}\right)^{1{,}667/(1{,}667-1)} =$$

$$= 0{,}702 \text{ MPa}$$

Pertanto, i valori critici di pressione e temperatura, per la 12.23 e la 12.22, risultano

$$p^* = p_T\left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} =$$

$$= 0{,}702 \times \left(\frac{2}{1{,}667+1}\right)^{1{,}667/(1{,}667-1)} = 0{,}342 \text{ MPa}$$

$$T^* = T_T\frac{2}{k+1} = 801 \times \frac{2}{1{,}667+1} = 601 \text{ K}$$

Discussione I valori calcolati sono quelli che la pressione e la temperatura assumono in corrispondenza della gola quando il moto a valle di essa è supersonico.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.12 Un aereo è progettato per viaggiare a Mach 1,4 alla quota di 8000 m, dove la temperatura dell'atmosfera è di 236,15 K. Calcolare la temperatura di ristagno sul bordo anteriore dell'ala.

Ipotesi L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti.

Proprietà La costante dell'aria, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 2.41, la velocità del suono è

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 236{,}15} = 308 \text{ m/s}$$

per cui la velocità dell'aereo è

$$V = c\,\text{Ma} = 308 \times 1{,}4 = 431 \text{ m/s}$$

Per la 12.5, la temperatura di ristagno risulta

$$T_T = T + \frac{V^2}{2c_p} = 236{,}15 + \frac{431}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 329 \text{ K}$$

Discussione In un processo di ristagno, la temperatura del gas aumenta come conseguenza della trasformazione dell'energia cinetica in entalpia.

Moto isoentropico negli ugelli

12.13 Cosa accadrebbe se, volendo rallentare un fluido in moto supersonico, lo si facesse defluire in un divergente?

Analisi Facendo defluire in un divergente un fluido in moto supersonico, il fluido, invece che rallentare, accelera ulteriormente.

Discussione Il contrario accade se il moto del fluido è subsonico.

12.14 Cosa accadrebbe se, volendo accelerare ulteriormente un fluido in moto supersonico, lo si facesse defluire in un divergente?

Analisi Facendo defluire in un divergente un fluido in moto supersonico, il fluido accelera ulteriormente.

Discussione Il contrario accade se il moto del fluido è subsonico.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.15 In un fluido in moto subsonico in un ugello convergente, fissate le condizioni all'imbocco, qual è l'effetto di un abbassamento della contropressione fino al valore critico sui valori **(a)** della velocità e **(b)** della pressione nella sezione di sbocco? e **(c)** sulla portata?

Analisi In un fluido in moto subsonico in un ugello convergente, nella sezione di sbocco, abbassando la contropressione fino al valore critico:

(a) la velocità è pari alla velocità del suono;

(b) la pressione è pari alla pressione critica;

(c) la portata assume il valore massimo possibile.

Discussione In queste condizioni, il moto è *soffocato* o in *choking*.

12.16 In un fluido in moto subsonico in un ugello convergente con pressione critica allo sbocco, fissate le condizioni all'imbocco, qual è l'effetto di un abbassamento della contropressione ben al di sotto del valore critico sui valori **(a)** della velocità e **(b)** della pressione nella sezione di sbocco? e **(c)** sulla portata?

Analisi In un fluido in moto subsonico in un ugello convergente con pressione critica allo sbocco, l'abbassamento della contropressione ben al di sotto del valore critico non produce alcun effetto nella sezione di sbocco

(a) né sulla velocità,

(b) né sulla pressione,

(c) né sulla portata.

Discussione In queste condizioni, il moto è già soffocato, per cui un ulteriore abbassamento della contropressione non ha alcuna influenza su ciò che accade a monte della sezione di sbocco.

12.17 Confrontare, a parità di condizioni nella sezione di imbocco, i valori della portata che si stabilisce, rispettivamente, in un ugello convergente e in un ugello convergente-divergente aventi la stessa area di gola.

Analisi Se la contropressione è sufficientemente bassa da consentire che si abbiano condizioni soniche in corrispondenza della gola, i valori della portata nei due ugelli sono identici. Se, invece, in corrispondenza della gola il moto non è sonico, la portata nell'ugello col tratto divergente è maggiore, perché tale tratto agisce come diffusore subsonico.

Discussione Se, in corrispondenza della gola, il moto è soffocato, quello che accade a valle non ha alcuna influenza sul moto a monte della gola.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.18 In cosa il numero di Mach critico differisce dal numero di Mach Ma?

Analisi Il numero di Mach critico Ma^* è pari al rapporto tra la velocità locale del fluido e la velocità del suono in corrispondenza della gola, mentre il numero di Mach Ma è pari al rapporto tra la velocità locale del fluido e la velocità locale del suono.

Discussione Le due quantità coincidono quando sono calcolate in corrispondenza della gola in condizioni di moto soffocato.

12.19 Nel moto isoentropico di un fluido in un convergente-divergente avente velocità subsonica in corrispondenza della gola, qual è l'effetto del tratto divergente sui valori di **(a)** velocità, **(b)** pressione e **(c)** portata?

Analisi

(a) La velocità diminuisce,

(b) la pressione aumenta,

(c) la portata di massa rimane costante.

Discussione Lo stesso accade per i fluidi incomprimibili.

12.20 Se in corrispondenza della gola un fluido ha velocità diversa dal valore sonico, è possibile accelerarlo fino a velocità supersoniche? Perché?

Analisi *No*, se il moto in corrispondenza della gola è subsonico perché, in tal caso, il tratto divergente funziona da diffusore e fa decelerare il fluido.

Si, se il moto in corrispondenza della gola è supersonico perché, in tal caso, il tratto divergente fa accelerare ulteriormente il fluido.

Discussione La seconda situazione può aversi solo se a monte dell'ugello esiste un altro ugello convergente-divergente e la differenza di pressione è sufficiente per rendere il moto soffocato nella gola dell'ugello di monte.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.21 Per un gas ideale si ha $Q_{m,\max}/A^* = ap_T/\sqrt{T_T}$, cioè la portata di massa massima per unità di area dipende solo da $p_T/\sqrt{T_T}$. Perché? Determinare il valore della costante a per un gas ideale per il quale si abbia $k = 1{,}4$ e $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K).

Analisi Per la 12.26

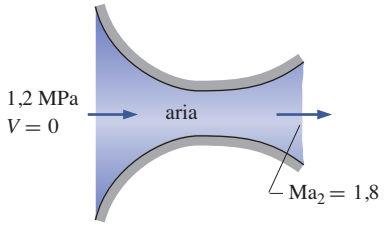
$$\frac{Q_{m,\max}}{A^*} = \frac{p_T}{\sqrt{T_T}}\sqrt{\frac{k}{R}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

Pertanto, assegnati k e R, la portata di massa massima per unità di area è proporzionale al rapporto $p_T/\sqrt{T_T}$ con coefficiente

$$a = \sqrt{\frac{k}{R}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}4}{0{,}287 \times 1000}} \times \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{2{,}4/0{,}8} = 0{,}0404\ \sqrt{\text{K}}/(\text{m/s})$$

Discussione Quando nella gola il moto è sonico, la portata di massa è determinata dalle condizioni di ristagno.



12.22 Nella sezione di ingresso di un convergente-divergente, una corrente di aria in moto isoentropico ha velocità trascurabile e pressione di 1,2 MPa. Calcolare il valore della contropressione per la quale nella sezione di uscita si ha $\text{Ma}_2 = 1{,}8$.

Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto attraverso l'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici è $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso, essendo la velocità trascurabile, la pressione di ristagno è uguale alla pressione p_1, per cui

$$p_T = p_1 = 1{,}2 \text{ MPa}$$

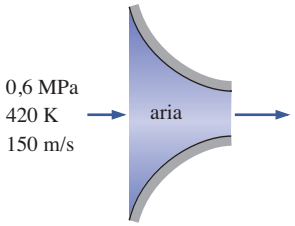
Essendo il moto isoentropico, la pressione di ristagno rimane costante lungo tutto l'ugello. Nella sezione di uscita, noto il numero di Mach, la pressione, per la 12.20, risulta

$$p_2 = p_T\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\text{Ma}_2^2\right)^{-k/(k-1)} =$$

$$= 1{,}2 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 1{,}8^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}209 \text{ MPa}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.23 Nella sezione di ingresso di un ugello, una corrente di aria in moto isoentropico ha velocità di 150 m/s, pressione di 0,6 MPa e temperatura di 420 K. Calcolare i valori che la temperatura e la pressione assumono nella sezione in cui la velocità del fluido eguaglia quella del suono. Calcolare il rapporto tra l'area di tale sezione e l'area della sezione di ingresso.



Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto attraverso l'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà Il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso la temperatura e la pressione di ristagno, rispettivamente, per la 12.5 e la 12.7, risultano

$$T_T = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 420 + \frac{150^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 431 \text{ K}$$

$$p_T = p_1 \left(\frac{T_T}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}6 \times \left(\frac{431}{420}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}658 \text{ MPa}$$

Tali valori si mantengono costanti lungo tutto l'ugello, perché il moto è isoentropico. Rispettivamente, per la 12.22 e la 12.23, i valori critici di temperatura e pressione risultano

$$T^* = T_T \frac{2}{k+1} = 431 \times \frac{2}{1{,}4+1} = 359 \text{ K}$$

$$p^* = p_T \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}658 \times \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}348 \text{ MPa}$$

Nella sezione di ingresso, si ha

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 420} = 411 \text{ m/s}$$

e

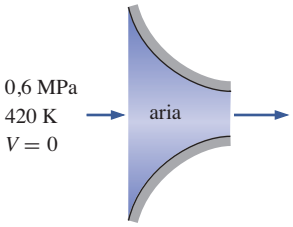
$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{150}{411} = 0{,}365$$

Per la 12.27, il rapporto tra l'area della sezione in cui il moto è sonico e l'area della sezione di ingresso vale

$$\frac{A^*}{A_1} = \text{Ma}_1 \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)\right]^{-(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= 0{,}365 \times \left[\frac{2}{1{,}4+1} \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}365^2\right)\right]^{-2{,}4/0{,}8} = 0{,}583$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.24 Risolvere il problema precedente nell'ipotesi che la velocità all'ingresso sia trascurabile.

Analisi Nella sezione di ingresso, essendo la velocità trascurabile, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno sono uguali alla temperatura e alla pressione, per cui

$$T_T = T_1 = 420 \text{ K}$$

$$p_T = p_1 = 0{,}6 \text{ MPa}$$

Tali valori si mantengono costanti lungo tutto l'ugello, perché il moto è isoentropico. Rispettivamente, per la 12.22 e la 12.23, i valori critici di temperatura e pressione risultano

$$T^* = T_T \frac{2}{k+1} = 420 \times \frac{2}{1{,}4+1} = 350 \text{ K}$$

$$p^* = p_T \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}6 \times \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} =$$

$$= 0{,}317 \text{ MPa}$$

Nella sezione di ingresso, essendo $V_1 \cong 0$, è anche $\text{Ma}_1 = 0$. Per la 12.27, il rapporto tra l'area della sezione in cui il moto è sonico e l'area della sezione di ingresso vale

$$\frac{A^*}{A_1} = \text{Ma}_1 \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)\right]^{-(k+1)/[2(k-1)]} = 0$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.25 Un gas ideale con $k = 1{,}4$ defluisce isoentropicamente in un ugello in condizioni per le quali il numero di Mach assume il valore 2,4 in una sezione avente area di 36 cm^2. Calcolare l'area della sezione in cui il numero di Mach vale 1,2.

Ipotesi Il moto è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Analisi Essendo il moto isoentropico, le grandezze di ristagno e quelle critiche si mantengono costanti lungo tutto l'ugello. Noto il valore del numero di Mach Ma_1 in una sezione di area A_1, per la 12.27 l'area A^* della gola risulta

$$A^* = A_1 \,\mathrm{Ma}_1 \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{-(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= 36 \times 2{,}4 \times \left[\frac{2}{2{,}4} \times \left(1 + \frac{0{,}4}{2} \times 2{,}4^2\right)\right]^{-2{,}4/0{,}8} = 14{,}98 \text{ cm}^2$$

Pertanto, ancora per la 12.27, l'area della sezione in cui $\mathrm{Ma}_2 = 1{,}2$ risulta

$$A_2 = \frac{A^*}{\mathrm{Ma}_2}\left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= \frac{14{,}98}{1{,}2} \times \left[\frac{2}{2{,}4} \times \left(1 + \frac{0{,}4}{2} \times 1{,}2^2\right)\right]^{2{,}4/0{,}8} = 15{,}4 \text{ cm}^2$$

12.26 Risolvere il problema precedente per un gas ideale con $k = 1{,}33$.

Ipotesi Il moto è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Analisi Essendo il moto isoentropico, le grandezze di ristagno e quelle critiche si mantengono costanti lungo tutto l'ugello. Noto il valore del numero di Mach Ma_1 in una sezione di area A_1, per la 12.27 l'area A^* della gola risulta

$$A^* = A_1 \,\mathrm{Ma}_1 \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{-(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= 36 \times 2{,}4 \times \left[\frac{2}{2{,}33} \times \left(1 + \frac{0{,}33}{2} \times 2{,}4^2\right)\right]^{-2{,}33/0{,}66} = 14{,}0 \text{ cm}^2$$

Pertanto, ancora per la 12.27, l'area della sezione in cui $\mathrm{Ma}_2 = 1{,}2$ risulta

$$A_2 = \frac{A^*}{\mathrm{Ma}_2}\left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= \frac{14{,}0}{1{,}2} \times \left[\frac{2}{2{,}33} \times \left(1 + \frac{0{,}33}{2} \times 1{,}2^2\right)\right]^{2{,}33/0{,}66} = 14{,}4 \text{ cm}^2$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Onde d'urto e onde di espansione

12.27 È possibile che un'onda d'urto si formi nel tratto convergente di un ugello convergente-divergente? Perché?

Analisi No. Infatti, affinché si formi un'onda d'urto, il moto deve essere supersonico, ma nel tratto convergente di un ugello convergente-divergente il moto è sempre subsonico.

Discussione Se sussistono le condizioni, un'onda d'urto può eventualmente formarsi nel tratto divergente.

12.28 Cosa rappresenta un punto sulla linea di Fanno? e sulla linea di Rayleigh? Cosa rappresentano i punti intersezione tra le due curve?

Analisi La linea di Fanno è il luogo degli stati che soddisfano le equazioni di conservazione della massa e dell'energia. La linea di Rayleigh è il luogo degli stati che soddisfano le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto. I punti intersezione tra le due curve rappresentano gli stati che soddisfano le equazioni di conservazione della massa, dell'energia e della quantità di moto.

12.29 A valle di un'onda d'urto normale, il numero di Mach può essere maggiore di 1? Perché?

Analisi No. Per la seconda legge della termodinamica, a valle di un'onda d'urto normale il moto deve essere subsonico. Quindi, il numero di Mach deve essere minore di 1.

Discussione Attraverso un'onda d'urto normale, il moto passa sempre dalle condizioni supersoniche a quelle subsoniche.

12.30 Qual è l'influenza di un'onda d'urto normale **(a)** sulla velocità, **(b)** sulla temperatura statica, **(c)** sulla temperatura di ristagno, **(d)** sulla pressione statica e **(e)** sulla pressione di ristagno?

Analisi Attraverso un'onda d'urto normale

(a) la velocità diminuisce,

(b) la temperatura statica aumenta,

(c) la temperatura di ristagno non varia,

(d) la pressione statica aumenta,

(e) la pressione di ristagno diminuisce.

Discussione Inoltre, il numero di Mach passa da un valore maggiore di 1 (moto supersonico) a un valore minore di 1 (moto subsonico).

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.31 In quali condizioni si forma un'onda d'urto obliqua? In che cosa differisce da un'onda d'urto normale?

Analisi Un'onda d'urto obliqua si forma quando un gas in moto a velocità supersonica incontra un ostacolo cuneiforme appuntito o arrotondato. Mentre le onde d'urto normali sono perpendicolari alla direzione del moto, le onde d'urto oblique sono inclinate rispetto alla direzione del moto. Inoltre, le onde normali sono rettilinee mentre le onde oblique possono essere rettilinee o curve, in funzione della forma della superficie.

Discussione Mentre attraverso un'onda d'urto normale il numero di Mach passa da un valore maggiore di 1 (moto supersonico) a un valore minore di 1 (moto subsonico), a valle di un'onda d'urto obliqua il moto può essere sia supersonico che subsonico.

12.32 A monte di un'onda d'urto obliqua, il moto deve necessariamente essere supersonico? A valle di un'onda d'urto obliqua, il moto deve necessariamente essere subsonico?

Analisi Affinché si formi un'onda d'urto obliqua, a monte il moto deve essere necessariamente supersonico, ma a valle di essa il moto può essere supersonico, sonico o subsonico.

Discussione Anche a monte di un'onda d'urto normale il moto deve essere necessariamente supersonico, ma a valle di essa il moto deve essere necessariamente subsonico.

12.33 Attraverso **(a)** un'onda d'urto normale, **(b)** un'onda d'urto obliqua e **(c)** un'onda di espansione di Prandtl-Meyer, le relazioni valide per il moto isoentropico di un gas perfetto sono applicabili?

Analisi Le relazioni valide per il moto isoentropico di un gas perfetto:

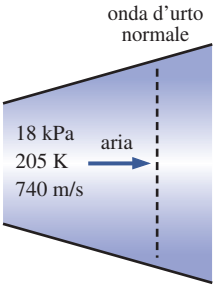
(a) *non sono* applicabili attraverso un'onda d'urto normale;

(b) *non sono* applicabili attraverso un'onda d'urto obliqua;

(c) *sono* applicabili attraverso un'onda di espansione di Prandtl-Meyer.

Discussione Il moto attraverso un'onda d'urto qualunque comporta perdite di energia (irreversibili) e, pertanto, non può essere isoentropico.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.34 A monte di un'onda d'urto normale, una corrente di aria ha velocità di 740 m/s, pressione di 18 kPa e temperatura di 205 K. Calcolare la pressione di ristagno e il numero di Mach a monte dell'onda e la pressione, la temperatura, la velocità, il numero di Mach e la pressione di ristagno a valle dell'onda.

Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** A monte dell'onda d'urto, il moto è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà La costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Rispettivamente, per la 12.5 e la 12.7, a monte dell'onda d'urto, la temperatura e la pressione di ristagno valgono

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 205 + \frac{740^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 477{,}4 \text{ K}$$

$$p_{T1} = p_1 \left(\frac{T_{T1}}{T_1} \right)^{k/(k-1)} = 18 \times \left(\frac{477{,}4}{205} \right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 347 \text{ kPa}$$

La velocità del suono e il numero di Mach risultano

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 205} = 287 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{740}{287} = 2{,}58$$

A valle dell'onda d'urto, rispettivamente, per la 12.38, la 12.37, la 12.34 e la 12.20, si ha

$$\text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\,\text{Ma}_1^2 + 2}{2k\,\text{Ma}_1^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{(1{,}4-1) \times 2{,}58^2 + 2}{2 \times 1{,}4 \times 2{,}58^2 - 1{,}4 + 1}} = 0{,}506$$

$$p_2 = p_1 \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} = 18 \times \frac{1 + 1{,}4 \times 2{,}58^2}{1 + 1{,}4 \times 0{,}506^2} = 137 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{1 + \text{Ma}_1^2(k-1)/2}{1 + \text{Ma}_2^2(k-1)/2} = 205 \times \frac{1 + 2{,}58^2 \times (1{,}4-1)/2}{1 + 0{,}506^2 \times (1{,}4-1)/2} = 455 \text{ K}$$

$$p_{T2} = p_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}_2^2 \right)^{k/(k-1)}$$

$$= 137 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}506^2 \right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 163 \text{ kPa}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Essendo

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 454} = 427 \text{ m/s}$$

la velocità risulta

$$V_2 = c_2 \, \text{Ma}_2 = 427 \times 0{,}506 = 216 \text{ m/s}$$

12.35 Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la variazione di entropia attraverso l'onda normale.

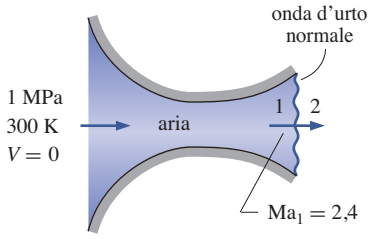
Analisi Per la 12.39, la variazione di entropia attraverso l'onda d'urto normale risulta

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} =$$

$$= 1{,}005 \times \ln \frac{455}{205} - 0{,}287 \times \ln \frac{137}{18} = 0{,}218 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$$

Discussione Il passaggio attraverso un'onda d'urto è un processo fortemente dissipativo, per cui si genera una grande quantità di entropia.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.36 All'imbocco del convergente-divergente di una galleria del vento supersonica, una corrente di aria ha velocità trascurabile, pressione di 1 MPa e temperatura di 300 K. Calcolare la pressione, la temperatura, la velocità, il numero di Mach e la pressione di ristagno a valle dell'onda d'urto normale che si forma nella sezione di uscita a Mach 2,4.

Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** A monte dell'onda d'urto, il moto è permanente, unidimensionale e isoentropico. **3** L'onda d'urto si forma in corrispondenza della sezione di sbocco.

Proprietà La costante del gas e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi All'imbocco, essendo la velocità trascurabile, le grandezze di ristagno coincidono con le rispettive grandezze statiche, per cui $p_T = 1$ MPa e $T_T = 300$ K. Tali valori, per l'ipotesi di moto isoentropico, si mantengono costanti fino alla sezione subito a monte dell'onda d'urto. In tale sezione, la temperatura e la pressione, rispettivamente, per la 12.19 e la 12.7, valgono

$$T_1 = \frac{2\,T_T}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2} = \frac{2 \times 300}{2 + (1{,}4-1) \times 2{,}4^2} = 139 \text{ K}$$

$$p_1 = p_T \left(\frac{T_1}{T_T}\right)^{k/(k-1)} = 1 \times \left(\frac{139}{300}\right)^{1{,}4/0{,}4} = 0{,}0684 \text{ MPa}$$

A valle dell'onda d'urto, rispettivamente, per la 12.38, la 12.37, la 12.34 e la 12.20, si ha

$$\mathrm{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{(1{,}4-1) \times 2{,}4^2 + 2}{2 \times 1{,}4 \times 2{,}4^2 - 1{,}4 + 1}} = 0{,}523$$

$$p_2 = p_1 \frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2} = 0{,}0684 \times \frac{1 + 1{,}4 \times 2{,}4^2}{1 + 1{,}4 \times 0{,}523^2} = 0{,}448 \text{ MPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{1 + \mathrm{Ma}_1^2\,(k-1)/2}{1 + \mathrm{Ma}_2^2\,(k-1)/2} = 139 \times \frac{1 + 2{,}4^2 \times (1{,}4-1)/2}{1 + 0{,}523^2 \times (1{,}4-1)/2} = 284 \text{ K}$$

$$p_{T2} = p_2 \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

$$= 0{,}448 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}523^2\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}540 \text{ MPa}$$

Essendo

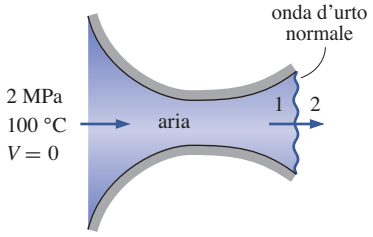
$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 284} = 338 \text{ m/s}$$

la velocità risulta

$$V_2 = c_2\,\mathrm{Ma}_2 = 338 \times 0{,}523 = 177 \text{ m/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.37 All'imbocco di un convergente-divergente, una corrente di aria ha velocità trascurabile, pressione di 2,0 MPa e temperatura di 100 °C. Se il rapporto tra l'area della sezione di sbocco e l'area della gola è pari a 3,5, quale deve essere il valore della contropressione perché in corrispondenza dello sbocco si formi un'onda d'urto normale?



Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale. **2** A monte dell'onda d'urto, il moto è permanente, unidimensionale e isoentropico. **3** L'onda d'urto si forma in corrispondenza della sezione di sbocco.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici è $k = 1{,}4$.

Analisi Il rapporto tra l'area della sezione di sbocco e l'area della gola, per la 12.27, è funzione solo del numero di Mach nella sezione di sbocco e del rapporto fra i calori specifici. Si ha, infatti,

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

che, sostituendo le grandezze note, diviene

$$3{,}5 = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\left[\frac{2}{1{,}4+1}\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{2{,}4/0{,}8} = \frac{(1+0{,}2\,\mathrm{Ma}_1^2)^3}{1{,}728\,\mathrm{Ma}_1}$$

equazione soddisfatta per $\mathrm{Ma}_1 = 2{,}8$.

Per l'ipotesi di moto isoentropico, la pressione di ristagno è costante e, pertanto, pari alla pressione all'imbocco. Questa, a sua volta, essendo la velocità all'imbocco trascurabile, è uguale alla pressione statica, per cui $p_T = 2{,}0$ MPa. Nella sezione di sbocco, a monte dell'onda d'urto, per la 12.20, si ha

$$p_1 = p_T\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-k/(k-1)} =$$

$$= 2{,}0 \times \left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\times 2{,}8^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}0737 \text{ MPa}$$

Per la 12.37e la 12.38, la contropressione, uguale alla pressione a valle dell'onda d'urto, risulta

$$p_2 = p_1\,\frac{1+k\mathrm{Ma}_1^2}{1+k\mathrm{Ma}_2^2} = p_1\,\frac{2k\mathrm{Ma}_1^2-k+1}{k+1} =$$

$$= 0{,}0737 \times \frac{2\times 1{,}4\times 2{,}8^2 - 1{,}4 + 1}{1{,}4+1} = 0{,}662 \text{ MPa}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.38 Con riferimento all'esercizio precedente, quale deve essere il valore della contropressione perché l'onda d'urto normale si formi in una sezione di area doppia rispetto a quella della gola?

Analisi Come nell'esercizio precedente, per la 12.27 deve essere

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]}$$

che, sostituendo le grandezze note, diviene

$$2 = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\left[\frac{2}{1{,}4+1}\left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{2{,}4/0{,}8} = \frac{(1+0{,}2\,\mathrm{Ma}_1^2)^3}{1{,}728\ \mathrm{Ma}_1}$$

equazione soddisfatta per $\mathrm{Ma}_1 = 2{,}2$.

Essendo ancora $p_T = 2{,}0$ MPa, nella sezione di sbocco, a monte dell'onda d'urto, per la 12.20, si ha

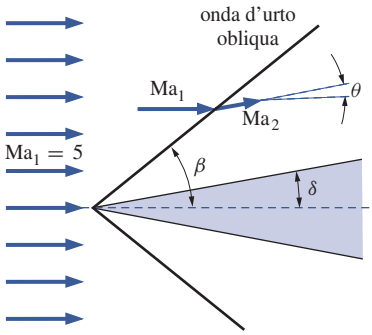
$$p_1 = p_T\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-k/(k-1)} =$$

$$= 2{,}0 \times \left(1+\frac{1{,}4-1}{2}\times 2{,}2^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)} = 0{,}187\ \mathrm{MPa}$$

La contropressione risulta

$$p_2 = p_1\,\frac{1+k\mathrm{Ma}_1^2}{1+k\mathrm{Ma}_2^2} = p_1\,\frac{2k\mathrm{Ma}_1^2-k+1}{k+1} =$$

$$= 0{,}187 \times \frac{2\times 1{,}4\times 2{,}2^2 - 1{,}4 + 1}{1{,}4+1} = 1{,}025\ \mathrm{MPa}$$



12.39 Una corrente di aria a Mach 5 investe un corpo bidimensionale cuneiforme. Mediante il grafico della Figura 12.35, stimare l'angolo di inclinazione minimo e l'angolo di deviazione massimo dell'onda d'urto obliqua rettilinea che si genera.

Analisi Per Ma = 5, dalla Figura 12.35 si legge

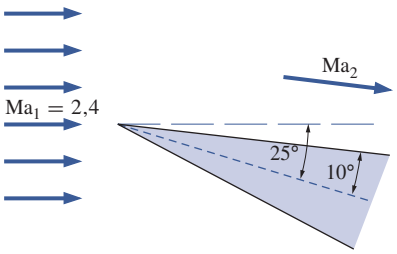
angolo di inclinazione minimo: $\beta_{\min} = 12°$

angolo di deviazione massimo: $\theta_{\max} = 41{,}5°$

Discussione Al crescere del numero di Mach, l'angolo di inclinazione minimo diminuisce, mentre l'angolo di deviazione massimo aumenta.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.40 Una corrente di aria a Mach 2,4, pressione di 70 kPa e temperatura di 260 K, investe un corpo bidimensionale cuneiforme con semiangolo di apertura di 10°. Calcolare il numero di Mach a valle e la pressione e la temperatura sulla faccia superiore del corpo, quando il suo asse forma un angolo di 25° con la direzione del moto.



Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Lo strato limite sulla parete del corpo è molto sottile. **3** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici dell'aria è $k = 1{,}4$.

Analisi Per l'ipotesi 2, si può ritenere che sia $\theta \cong \delta = 25 - 10 = 15°$. Per la 12.49, si ha

$$\nu(\mathrm{Ma}_1) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{Ma}_1^2 - 1)} - \arctan\sqrt{\mathrm{Ma}_1^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}4}{0{,}4}} \times \arctan\sqrt{\frac{0{,}4}{2{,}4} \times (2{,}4^2 - 1)} - \arctan\sqrt{2{,}4^2 - 1} = 36{,}75°$$

Per la 12.48, il valore della funzione di Prandtl-Meyer a valle è

$$\nu(\mathrm{Ma}_2) = \theta + \nu(\mathrm{Ma}_1) = 15 + 36{,}75 = 51{,}75°$$

Noto il valore della funzione di Prandtl-Meyer $\nu(\mathrm{Ma}_2)$, il calcolo del valore del numero di Mach Ma_2 che soddisfa la 12.49 non è immediato in quanto l'equazione è implicita in Ma_2. Si deve, pertanto, fare ricorso ad un metodo iterativo. L'equazione risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 3{,}105$. Considerando il moto isoentropico, si ha $p_T =$ costante e, quindi,

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p_T}{p_1/p_T}$$

e, introducendo la 12.20,

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p_T}{p_1/p_T} = p_1 \frac{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-k/(k-1)}}{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-k/(k-1)}} =$$

$$= 70 \times \left(\frac{1 + 0{,}4 \times 3{,}105^2/2}{1 + 0{,}4 \times 2{,}4^2/2}\right)^{-1{,}4/0{,}4} = 23{,}8 \text{ kPa}$$

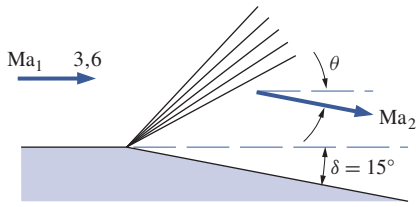
Analogamente, essendo $T_T =$ costante, introducendo la 12.19, si ha

$$T_2 = T_1 \frac{T_2/T_T}{T_1/T_T} = T_1 \frac{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-1}}{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-1}} =$$

$$= 260 \times \left(\frac{1 + 0{,}4 \times 3{,}105^2/2}{1 + 0{,}4 \times 2{,}4^2/2}\right)^{-1} = 191 \text{ K}$$

Discussione Trattandosi di un processo di espansione, i valori del numero di Mach e della pressione a valle sono entrambi inferiori a quelli di monte.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.41 Una corrente di aria a Mach 3,6, pressione di 40 kPa e temperatura di 280 K, è costretta a subire un'espansione mediante una deviazione di 15°. Calcolare il numero di Mach, la pressione e la temperatura dell'aria a valle dell'espansione.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Lo strato limite sulla parete del corpo è molto sottile. **3** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici dell'aria è $k = 1{,}4$.

Analisi Per l'ipotesi 2, si può ritenere che sia $\theta \cong \delta = 15°$. Per la 12.49, si ha

$$\nu(\mathrm{Ma}_1) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\arctan\sqrt{\frac{k-1}{k+1}\,(\mathrm{Ma}_1^2 - 1)} - \arctan\sqrt{\mathrm{Ma}_1^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}4}{0{,}4}} \times \arctan\sqrt{\frac{0{,}4}{2{,}4} \times (3{,}6^2 - 1)} - \arctan\sqrt{3{,}6^2 - 1} = 60{,}09°$$

Per la 12.48, il valore della funzione di Prandtl-Meyer a valle è

$$\nu(\mathrm{Ma}_2) = \theta + \nu(\mathrm{Ma}_1) = 15 + 60{,}09 = 75{,}09°$$

Noto il valore della funzione di Prandtl-Meyer $\nu(\mathrm{Ma}_2)$, il calcolo del valore del numero di Mach Ma_2 che soddisfa la 12.49 non è immediato in quanto l'equazione è implicita in Ma_2. Si deve, pertanto, fare ricorso ad un metodo iterativo. L'equazione risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 4{,}81$. Considerando il moto isoentropico, si ha $p_T =$ costante e, quindi,

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p_T}{p_1/p_T}$$

e, introducendo la 12.20,

$$p_2 = p_1\,\frac{p_2/p_T}{p_1/p_T} = p_1\,\frac{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-k/(k-1)}}{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-k/(k-1)}} =$$

$$= 40 \times \left(\frac{1 + 0{,}4 \times 4{,}81^2/2}{1 + 0{,}4 \times 3{,}6^2/2}\right)^{-1{,}4/0{,}4} = 8{,}31\ \mathrm{kPa}$$

Analogamente, essendo $T_T =$ costante, introducendo la 12.19, si ha

$$T_2 = T_1\,\frac{T_2/T_T}{T_1/T_T} = T_1\,\frac{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-1}}{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-1}} =$$

$$= 280 \times \left(\frac{1 + 0{,}4 \times 4{,}81^2/2}{1 + 0{,}4 \times 3{,}6^2/2}\right)^{-1} = 179\ \mathrm{K}$$

Discussione Trattandosi di un processo di espansione, i valori del numero di Mach e della pressione a valle sono entrambi inferiori a quelli di monte.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Moto con scambio di calore e resistenze trascurabili (Flusso di Rayleigh)

12.42 Quali sono le caratteristiche dei flussi di Rayleigh?

Analisi La caratteristica principale dei flussi di Rayleigh è la presenza di scambi di calore attraverso le pareti del condotto. Le altre ipotesi che li caratterizzano sono quelle di moto permanente e unidimensionale e di resistenza delle pareti trascurabile.

12.43 Nei flussi di Rayleigh, come cambia l'entropia del fluido quando esso assorbe o cede calore?

Analisi Nei flussi di Rayleigh, non essendovi fenomeni irreversibili come sono le dissipazioni dovute alla resistenza delle pareti, l'entropia del fluido può variare solo nel caso di scambi di calore con l'esterno. Pertanto, essa aumenta quando il fluido riceve calore, diminuisce quando il fluido cede calore.

12.44 Fornendo calore a un flusso di Rayleigh subsonico di aria, il numero di Mach aumenta da 0,92 a 0,95. La temperatura T dell'aria aumenta, diminuisce o rimane costante? E la temperatura di ristagno T_T?

Analisi In un flusso di Rayleigh, per la 12.54, fornire calore al fluido fa aumentare la temperatura di ristagno sia nel moto subsonico che nel moto supersonico. Anche la temperatura aumenta (vedi Figura 12.46), tranne che nel caso di moto subsonico per valori di Ma compresi tra $1/\sqrt{k}$ e 1. Per l'aria si ha $k = 1{,}4$, per cui la temperatura inizia a diminuire per $\text{Ma} = 1/\sqrt{1{,}4} = 0{,}845$. Pertanto, nel caso in esame, la temperatura diminuisce.

Discussione Questa conclusione sembra in contrasto con quanto suggerito dall'intuito. La diminuzione di temperatura è dovuta, per la 12.5, al notevole aumento di velocità.

12.45 Nel flusso di Rayleigh subsonico, qual è l'effetto del riscaldamento del fluido sulla sua velocità? E nel flusso di Rayleigh supersonico?

Analisi Come indica la linea di Rayleigh (vedi Figura 12.46), in un flusso subsonico, al crescere dell'entropia, fornendo cioè calore al fluido, il numero di Mach tende a 1 (da valori minori di 1 perché il moto è subsonico). Ciò vuol dire che la velocità del fluido via via aumenta. Anche in un flusso supersonico, al crescere dell'entropia il numero di Mach tende a 1, però da valori maggiori di 1 perché il moto è supersonico. Ciò vuol dire che la velocità via via diminuisce.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

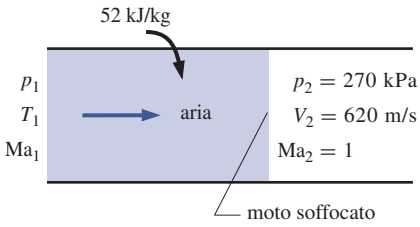
12.46 Un flusso di Rayleigh subsonico viene riscaldato fino a fargli raggiungere condizioni soniche in corrispondenza della sezione di uscita. Continuando a riscaldare il fluido, nella sezione di uscita il moto diventa subsonico, supersonico o rimane sonico?

Analisi La linea di Rayleigh (vedi Figura 12.46) indica chiaramente che l'ulteriore riscaldamento di un fluido che sia già nello stato critico (Ma $=$ 1) non produce alcun aumento della sua velocità perché nel punto di massima entropia si ha, comunque, Ma $=$ 1. Pertanto, l'ulteriore riscaldamento del fluido dà luogo ad un moto *soffocato*.

Discussione Non c'è modo, in questo caso, di rendere il moto supersonico.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.47 Fornendo a una corrente d'aria in moto subsonico in una tubazione una quantità di calore pari a 52 kJ/kg, il moto diviene soffocato. In tali condizioni, la velocità è di 620 m/s e la pressione statica è di 270 kPa. Trascurando la resistenza delle pareti, calcolare i valori che la velocità, la temperatura statica e la pressione statica hanno all'ingresso della tubazione.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione 2 in cui il moto è soffocato si ha $\mathrm{Ma}_2 = 1$, per cui la velocità del suono in tale sezione è

$$c_2 = \frac{V_2}{\mathrm{Ma}_2} = \frac{620}{1} = 620 \text{ m/s}$$

Per la 2.41 è

$$c_2 = \sqrt{kRT_2}$$

da cui

$$T_2 = \frac{c_2^2}{kR} = \frac{620^2}{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000} = 957 \text{ K}$$

Per la 12.5, la temperatura di ristagno è

$$T_{T2} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} = 957 + \frac{620^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 1148 \text{ K}$$

Nota la temperatura di ristagno nella sezione 2 e il calore $q_c = 52$ kJ/kg fornito alla corrente, per la 12.54, la temperatura di ristagno nella sezione 1 di ingresso vale

$$T_{T1} = T_{T2} - \frac{q_c}{c_p} = 1148 - \frac{52}{1{,}005} = 1096 \text{ K}$$

La temperatura critica T_T^* è pari alla temperatura di ristagno nella sezione 2, in quanto $\mathrm{Ma}_2 = 1$, per cui

$$T_T^* = T_{T2} = 1148\text{K}$$

Per la 12.67,

$$\frac{T_{T1}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}_1^2\,[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2]}{(1 + k\mathrm{Ma}_1^2)^2}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

e, sostituendo i valori noti,

$$\frac{1096}{1148} = \frac{2{,}4 \times \mathrm{Ma}_1^2 \times (2 + 0{,}4 \times \mathrm{Ma}_1^2)}{(1 + 1{,}4 \times \mathrm{Ma}_1^2)^2}$$

equazione che risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}779$.

All'ingresso della tubazione, per la 12.66, la 12.65 e la 12.64 si ha, rispettivamente,

$$V_1 = V^* \frac{(1+k)\,\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_1^2} = 620 \times \frac{(1 + 1{,}4) \times 0{,}779^2}{1 + 1{,}4 \times 0{,}779^2} = 488 \text{ m/s}$$

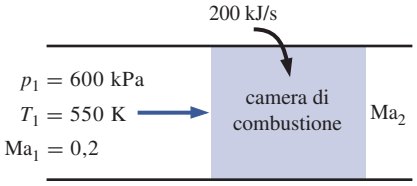
$$T_1 = T^* \left[\frac{\mathrm{Ma}_1\,(1+k)}{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}\right]^2 = 957 \times \left[\frac{0{,}779 \times (1 + 1{,}4)}{1 + 1{,}4 \times 0{,}779^2}\right]^2 = 978 \text{ K}$$

$$p_1 = p^* \frac{1+k}{1 + k\mathrm{Ma}_1^2} = 270 \times \frac{1 + 1{,}4}{1 + 1{,}4 \times 0{,}779^2} = 350 \text{ kPa}$$

Discussione Come indicato dalla linea di Rayleigh (Figura 12.46), in un moto subsonico che, fornendo calore al fluido, diventa sonico, la temperatura diminuisce, mentre la velocità aumenta.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.48 In una turbina a gas, una portata d'aria di 0,3 kg/s dal compressore passa alla camera di combustione nello stato $T_1 = 550$ K, $p_1 = 600$ kPa e $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}2$. Mentre l'aria defluisce nel condotto con resistenze trascurabili, il processo di combustione le fornisce una quantità di calore pari a 200 kJ/s. Calcolare il numero di Mach nella sezione di uscita e la diminuzione della pressione di ristagno $p_{T1} - p_{T2}$.



Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili). **2** La camera di combustione è a sezione costante. **3** L'aumento di massa dovuto alla immissione di combustibile è trascurabile.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Rispettivamente, per la 12.19 e la 12.20, nella sezione di ingresso la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno valgono

$$T_{T1} = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right) =$$

$$= 550 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}2^2\right) =$$

$$= 554 \text{ K}$$

$$p_{T1} = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)^{k/(k-1)} =$$

$$= 600 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}2^2\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} =$$

$$= 617{,}0 \text{ kPa}$$

Essendo $Q_m = 0{,}3$ kg/s la portata di massa, cioè la massa d'aria che entra nell'unità di tempo e $Q_c = 200$ kJ/s la quantità di calore fornita dal processo di combustione nell'unità di tempo, il calore q_c ricevuto dall'unità di massa è

$$q_c = \frac{Q_c}{Q_m} = \frac{200}{0{,}3} = 666{,}7 \text{ kJ/kg}$$

Per la 12.54, la temperatura di ristagno nella sezione uscita vale

$$T_{T2} = T_{T1} + \frac{q_c}{c_p} = 554 + \frac{666{,}7}{1{,}005} = 1217 \text{ K}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Per la 12.67, il valore critico della temperatura di ristagno è

$$T_T^* = T_{T1}\,\frac{(1+k\mathrm{Ma}_1^2)^2}{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\,[2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2]} =$$

$$= 554 \times \frac{(1+1{,}4\times 0{,}2^2)^2}{(1{,}4+1)\times 0{,}2^2\times[2+(1{,}4-1)\times 0{,}2^2]} =$$

$$= 3192\ \mathrm{K}$$

Nella sezione 2, ancora per la 12.67, si ha

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2\,[2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2]}{(1+k\mathrm{Ma}_2^2)^2}$$

e, sostituendo i valori noti,

$$\frac{1217}{3192} = \frac{(1{,}4+1)\times \mathrm{Ma}_2^2\times[2+(1{,}4-1)\times \mathrm{Ma}_2^2]}{(1+1{,}4\times \mathrm{Ma}_2^2)^2}$$

equazione che risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}319$.

Per la 12.68, il valore critico della pressione di ristagno è

$$p_T^* = p_{T1}\,\frac{1+k\mathrm{Ma}_1^2}{k+1}\left[\frac{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{k+1}\right]^{-k/(k-1)} =$$

$$= 617{,}0 \times \frac{1+1{,}4\times 0{,}2^2}{1{,}4+1} \times \left[\frac{2+0{,}4\times 0{,}2^2}{1{,}4+1}\right]^{-1{,}4/0{,}4} =$$

$$= 499{,}8\ \mathrm{kPa}$$

per cui, ancora per la 12.68, la pressione di ristagno nella sezione di uscita risulta

$$p_{T2} = p_T^*\,\frac{k+1}{1+k\mathrm{Ma}_2^2}\left[\frac{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}{k+1}\right]^{k/(k-1)} =$$

$$= 499{,}8 \times \frac{1{,}4+1}{1+1{,}4\times 0{,}319^2} \times \left[\frac{2+0{,}4\times 0{,}319^2}{1{,}4+1}\right]^{1{,}4/0{,}4} =$$

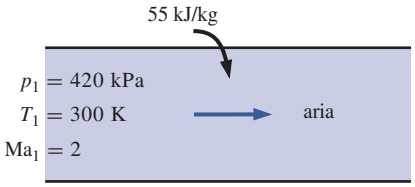
$$= 595{,}2\ \mathrm{kPa}$$

Pertanto, la pressione di ristagno diminuisce di

$$\Delta p_T = p_{T1} - p_{T2} = 617{,}0 - 595{,}2 = 21{,}8\ \mathrm{kPa}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.49 Nella sezione di ingresso di una condotta rettangolare, una corrente d'aria ha $T_1 = 300$ K, $p_1 = 420$ kPa e $\mathrm{Ma}_1 = 2$. Durante il suo moto, all'aria viene ceduta una quantità di calore pari a 55 kJ/kg. Calcolare la temperatura e il numero di Mach all'uscita della condotta, nell'ipotesi di resistenze trascurabili.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 2.41, nella sezione di ingresso si ha

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 300} = 347 \text{ m/s}$$

Conseguentemente,

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1 c_1 = 2 \times 347 = 694 \text{ m/s}$$

e, per la 12.5,

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 300 + \frac{694^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 539{,}6 \text{ K}$$

Per la 12.54, la temperatura di ristagno nella sezione di uscita risulta

$$T_{T2} = T_{T1} + \frac{q_c}{c_p} = 539{,}6 + \frac{55}{1{,}005} = 594{,}3 \text{ K}$$

Per la 12.67, il valore critico della temperatura di ristagno è

$$T_T^* = T_{T1} \frac{(1 + k\mathrm{Ma}_1^2)^2}{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\,[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2]}$$

$$= 539{,}6 \times \frac{(1 + 1{,}4 \times 2^2)^2}{(1{,}4+1) \times 2^2 \times [2 + (1{,}4-1) \times 2^2]} = 680{,}1 \text{ K}$$

Nella sezione di uscita, ancora per la 12.67, si ha

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2\,[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_2^2]}{(1 + k\mathrm{Ma}_2^2)^2}$$

e, sostituendo i valori noti,

$$\frac{594{,}3}{680{,}1} = \frac{(1{,}4+1) \times \mathrm{Ma}_2^2 \times [2 + (1{,}4-1) \times \mathrm{Ma}_2^2]}{(1 + 1{,}4 \times \mathrm{Ma}_2^2)^2}$$

equazione che risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 1{,}642$.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Per la 12.65, la temperatura critica risulta

$$T^* = T_1 \left[\frac{\mathrm{Ma}_1 (1+k)}{1 + k\mathrm{Ma}_1^2} \right]^{-2} = 300 \times \left[\frac{2 \times (1+1{,}4)}{1 + 1{,}4 \times 2^2} \right]^{-2} =$$

$$= 567{,}2 \text{ K}$$

per cui, ancora per la 12.65, la temperatura nella sezione di uscita risulta

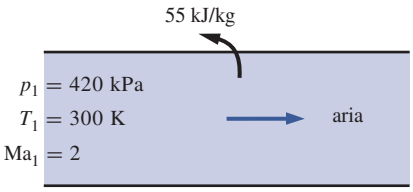
$$T_2 = T^* \left[\frac{\mathrm{Ma}_2 (1+k)}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2} \right]^{2} = 567{,}2 \times \left[\frac{1{,}642 \times (1+1{,}4)}{1 + 1{,}4 \times 1{,}642^2} \right]^{2} =$$

$$= 386{,}4 \text{ K}$$

Discussione Come indicato dalla linea di Rayleigh (Figura 12.46), in un moto supersonico, fornendo calore al fluido, la temperatura aumenta.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.50 Risolvere l'esercizio precedente nell'ipotesi che all'aria venga sottratta una quantità di calore pari a 55 kJ/kg.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 2.41, nella sezione di ingresso si ha

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 300} = 347 \text{ m/s}$$

Conseguentemente,

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1 \, c_1 = 2 \times 347{,}2 = 694 \text{ m/s}$$

e, per la 12.5,

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 300 + \frac{694^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 540 \text{ K}$$

Per la 12.54, la temperatura di ristagno nella sezione di uscita risulta

$$T_{T2} = T_{T1} + \frac{q_c}{c_p} = 540 + \frac{-55}{1{,}005} = 485 \text{ K}$$

Per la 12.67, il valore critico della temperatura di ristagno è

$$T_T^* = T_{T1} \frac{(1 + k\mathrm{Ma}_1^2)^2}{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\,[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2]} =$$

$$= 540 \times \frac{(1 + 1{,}4 \times 2^2)^2}{(1{,}4+1) \times 2^2 \times [2 + (1{,}4-1) \times 2^2]} = 681 \text{ K}$$

Nella sezione di uscita, ancora per la 12.67, si ha

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2\,[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_2^2]}{(1 + k\mathrm{Ma}_2^2)^2}$$

e, sostituendo i valori noti,

$$\frac{485}{681} = \frac{(1{,}4+1) \times \mathrm{Ma}_2^2 \times [2 + (1{,}4-1) \times \mathrm{Ma}_2^2]}{(1 + 1{,}4 \times \mathrm{Ma}_2^2)^2}$$

equazione che risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 2{,}48$.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Per la 12.65, la temperatura critica risulta

$$T^* = T_1 \left[\frac{\mathrm{Ma}_1\,(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}_1^2}\right]^{-2} = 300 \times \left[\frac{2 \times (1+1{,}4)}{1+1{,}4 \times 2^2}\right]^{-2} =$$

$$= 567 \text{ K}$$

per cui, ancora per la 12.65, la temperatura nella sezione di uscita risulta

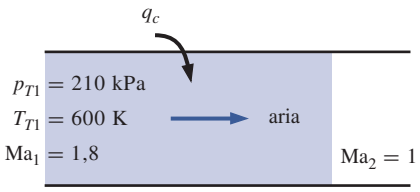
$$T_2 = T^* \left[\frac{\mathrm{Ma}_2\,(1+k)}{1+k\mathrm{Ma}_2^2}\right]^{2} = 567 \times \left[\frac{2{,}48 \times (1+1{,}4)}{1+1{,}4 \times 2{,}48^2}\right]^{2} =$$

$$= 217{,}5 \text{ K}$$

Discussione Come indicato dalla linea di Rayleigh (Figura 12.46), in un moto supersonico, sottraendo calore al fluido, la temperatura diminuisce.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.51 Una corrente di aria in moto supersonico, con resistenze trascurabili, in una tubazione del diametro di 10 cm, nella sezione di ingresso ha $T_{T1} = 600$ K, $p_{T1} = 210$ kPa e $\mathrm{Ma}_1 = 1{,}8$. Lungo il percorso l'aria viene riscaldata per diminuirne la velocità. Calcolare fino a quale temperatura può essere riscaldata senza farne variare la portata di massa.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Rispettivamente, per la 12.19 e la 12.20, nella sezione di ingresso la temperatura statica e la pressione statica risultano

$$T_1 = T_{T1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-1} = 600 \times \left(1 + \frac{0{,}4}{2} \times 1{,}8^2\right)^{-1} =$$

$$= 364 \text{ K}$$

$$p_1 = p_{T1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-k/(k-1)} =$$

$$= 210 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 1{,}8^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)} = 36{,}5 \text{ kPa}$$

Conseguentemente, nella sezione di ingresso, la densità, la velocità e la portata di massa valgono, rispettivamente,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{36{,}5}{0{,}287 \times 364} = 0{,}349 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1\, c_1 = \mathrm{Ma}_1\sqrt{kRT_1} = 1{,}8 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 364} = 688 \text{ m/s}$$

$$Q_m = \rho_1 A_1 V_1 = 0{,}349 \times \pi \times 0{,}10^2/4 \times 688 = 1{,}89 \text{ kg/s}$$

La temperatura a cui si può portare il fluido senza causare variazioni della portata di massa è pari alla temperatura critica T^*, che, per la 12.65, risulta

$$T_2 = T^* = T_1\left[\frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{\mathrm{Ma}_1\,(1+k)}\right]^2 = 364 \times \left[\frac{1 + 1{,}4 \times 1{,}8^2}{1{,}8 \times (1 + 1{,}4)}\right]^2 =$$

$$= 598 \text{ K}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

La temperatura di ristagno T_{T2} è pari alla temperatura critica di ristagno, che, per la 12.67, vale

$$T_{T2} = T_T^* = T_{T1}\,\frac{(1 + k\mathrm{Ma}_1^2)^2}{(k+1)\mathrm{Ma}_1^2\,[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2]} =$$

$$= 600 \times \frac{(1 + 1{,}4 \times 1{,}8^2)^2}{(1{,}4+1) \times 1{,}8^2 \times [2 + (1{,}4-1) \times 1{,}8^2]} =$$

$$= 717 \text{ K}$$

Per la 12.69, la quantità massima di calore che può essere ceduta al fluido, senza farne variare la portata, è

$$q_c = c_p\,(T_T^* - T_{T1}) = 1{,}005 \times (717 - 600) = 118 \text{ kJ/kg}$$

Discussione Riscaldando ulteriormente il fluido, la portata di massa diminuisce.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Moto adiabatico con resistenze non trascurabili (Flusso di Fanno)

12.52 Quali sono le caratteristiche dei flussi di Fanno?

Analisi La caratteristica principale dei flussi di Fanno è la presenza della resistenza al moto causata dalle pareti del condotto. Le altre ipotesi sono quelle di moto permanente, unidimensionale e adiabatico.

Discussione La caratteristica principale dei flussi di Rayleigh è lo scambio di calore con l'esterno e l'assenza di resistenza delle pareti; quella dei flussi di Fanno è la resistenza delle pareti e l'assenza di scambio di calore con l'esterno.

12.53 Nei flussi di Fanno, che influenza ha la resistenza delle pareti sull'entropia del fluido?

Analisi Nei flussi di Fanno, la resistenza delle pareti fa *sempre aumentare l'entropia*.

Discussione Se così non fosse, non sarebbe soddisfatta la seconda legge della termodinamica.

12.54 In un flusso di Fanno, a causa della resistenza della tubazione, il numero di Mach passa da $0,70$ nella sezione di ingresso a $0,90$ nella sezione di uscita. La temperatura di ristagno T_T, la pressione di ristagno p_T e l'entropia s del fluido aumentano, diminuiscono o rimangono costanti?

Analisi Nei flussi di Fanno subsonici, all'aumentare del numero di Mach, la temperatura di ristagno T_T rimane costante, la pressione di ristagno p_T diminuisce e l'entropia s del fluido aumenta.

Discussione La resistenza delle pareti causa perdite irreversibili che si traducono in una diminuzione della pressione di ristagno e in un aumento dell'entropia. La temperatura di ristagno, invece, essendo il moto adiabatico, rimane costante nella direzione del moto.

12.55 In un flusso di Fanno, a causa della resistenza della tubazione, il numero di Mach passa da $1,8$ nella sezione di ingresso a $1,2$ nella sezione di uscita. La temperatura di ristagno T_T, la pressione di ristagno p_T e l'entropia s del fluido aumentano, diminuiscono o rimangono costanti?

Analisi Nei flussi di Fanno supersonici, quando il numero di Mach diminuisce, la temperatura di ristagno T_T rimane costante, la pressione di ristagno p_T diminuisce e l'entropia s del fluido aumenta.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Discussione La resistenza delle pareti causa perdite irreversibili che si traducono in una diminuzione della pressione di ristagno e in un aumento dell'entropia. La temperatura di ristagno, invece, essendo il moto adiabatico, rimane costante nella direzione del moto.

12.56 Nel flusso di Fanno subsonico, qual è l'effetto delle resistenze sulla velocità? E in quello supersonico?

Analisi Per effetto della resistenza delle pareti, la velocità aumenta nel flusso di Fanno subsonico e diminuisce nel flusso di Fanno supersonico.

Discussione Queste conclusioni, che sembrano in contrasto con quanto suggerito dall'intuito, derivano dall'andamento della linea di Fanno, che rispetta le equazioni di conservazione.

12.57 Un flusso di Fanno subsonico accelera, a causa della resistenza delle pareti, fino a raggiungere lo stato sonico in corrispondenza della sezione di uscita della condotta. Aggiungendo un tratto di condotta a valle di tale sezione, nella sezione il moto diventa subsonico, supersonico o rimane sonico? e la portata di massa aumenta, diminuisce o rimane costante?

Analisi Essendo il moto soffocato, nella sezione di uscita si mantiene lo stato sonico. Se si aggiunge un altro tratto di condotta, la portata di massa diminuisce.

Discussione Poiché il moto non può diventare supersonico (non esiste una gola), le condizioni di moto cambiano in modo da mantenere le condizioni soniche nella sezione di sbocco.

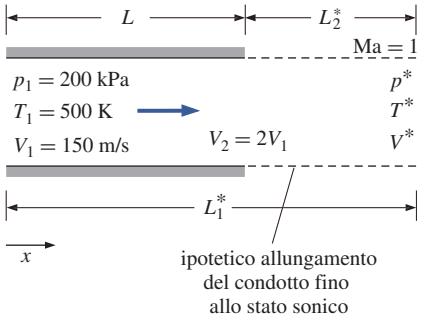
12.58 Un flusso di Fanno supersonico rallenta, a causa della resistenza delle pareti, fino a raggiungere lo stato sonico in corrispondenza della sezione di uscita della condotta. Aggiungendo un tratto di condotta a valle di tale sezione, nella sezione il moto diventa subsonico, supersonico o rimane sonico? e la portata di massa aumenta, diminuisce o rimane costante?

Analisi Nella sezione di uscita, si mantiene lo stato sonico. Se si aggiunge un altro tratto di condotta, la portata di massa rimane costante, perché il moto a monte non ne è influenzato.

Discussione Il valore della portata di massa è fissato dalle condizioni di ristagno di monte e dalle dimensioni della gola; pertanto, la portata di massa non varia se aumenta la lunghezza della condotta. Però, aumentando tale lunghezza, si forma un'onda d'urto.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.59 Nella sezione di ingresso di una tubazione del diametro di 15 cm, una corrente d'aria ha $V_1 = 150$ m/s, $T_1 = 500$ K e $p_1 = 200$ kPa. Essendo il moto adiabatico e l'indice di resistenza medio pari a 0,014, calcolare a quale distanza dalla sezione di ingresso la velocità dell'aria si raddoppia e di quanto diminuisce la pressione nel tratto tra le due sezioni.



Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** Lungo la condotta l'indice di resistenza si mantiene costante.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso, si ha

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 500} = 448 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{150}{448} = 0{,}335 \text{ m/s}$$

e, per la 12.88,

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 = \frac{1 - \text{Ma}_1^2}{k\,\text{Ma}_1^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\,\text{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\text{Ma}_1^2} =$$

$$= \frac{1 - 0{,}335^2}{1{,}4 \times 0{,}335^2} + \frac{1{,}4+1}{2 \times 1{,}4} \times \ln \frac{(1{,}4+1) \times 0{,}335^2}{2 + 0{,}4 \times 0{,}335^2} =$$

$$= 3{,}91$$

Per la 12.92, si ha, inoltre,

$$\frac{V_1}{V^*} = \text{Ma}_1 \sqrt{\frac{k+1}{2 + (k-1)\,\text{Ma}_1^2}} = 0{,}335 \times \sqrt{\frac{1{,}4+1}{2 + 0{,}4 \times 0{,}335^2}} =$$

$$= 0{,}363$$

Nella sezione 2 si ha $V_2 = 2V_1$ e, pertanto,

$$\frac{V_2}{V^*} = \frac{2V_1}{V^*} = 2 \times 0{,}363 = 0{,}726$$

Dalla 12.92, scritta per la sezione 2, si ha

$$\text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{2(V_2/V^*)^2}{(k+1) - (k-1)(V_2/V^*)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}726^2}{2{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}726^2}} =$$

$$= 0{,}694$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

e, per la 12.88,

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 = \frac{1-\mathrm{Ma}_2^2}{k\,\mathrm{Ma}_2^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2} =$$

$$= \frac{1-0{,}694^2}{1{,}4\times 0{,}694^2} + \frac{1{,}4+1}{2\times 1{,}4}\times\ln\frac{(1{,}4+1)\times 0{,}694^2}{2+0{,}4\times 0{,}694^2} = 0{,}220$$

Per la 12.89, la lunghezza L del tratto compreso fra le sezioni in cui il numero di Mach assume i valori Ma_1 e Ma_2 è

$$L = \left[\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2\right]\frac{D_i}{\lambda_m} = (3{,}91-0{,}220)\times\frac{0{,}15}{0{,}014} =$$

$$= 39{,}5\ \mathrm{m}$$

La 12.90 fornisce la pressione, adimensionalizzata rispetto alla pressione critica p^*, in funzione del numero di Mach. Scrivendo la 12.90, rispettivamente, per la sezione 1 e la sezione 2 si ha

$$\frac{p_1}{p^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2}}$$

$$\frac{p_2}{p^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_2}\sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2}}$$

Dividendo membro a membro, si ottiene

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mathrm{Ma}_2}{\mathrm{Ma}_1}\sqrt{\frac{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}}$$

da cui

$$p_2 = p_1\frac{\mathrm{Ma}_1}{\mathrm{Ma}_2}\sqrt{\frac{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}} =$$

$$= 200\times\frac{0{,}335}{0{,}694}\times\sqrt{\frac{2+(1{,}4-1)\times 0{,}335^2}{2+(1{,}4-1)\times 0{,}694^2}} = 93{,}2\ \mathrm{kPa}$$

La diminuzione di pressione tra la sezione 1 e la sezione 2 vale, pertanto,

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 200 - 93{,}2 = 107\ \mathrm{kPa}$$

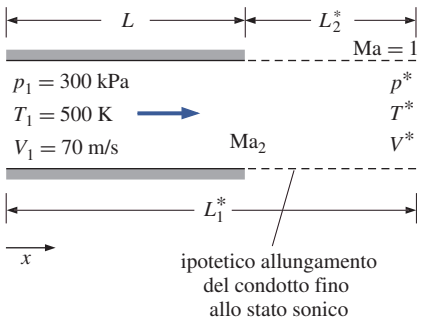
Discussione La lunghezza sonica della sezione 2 è

$$L_2^* = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2\frac{D_i}{\lambda_m} = 0{,}220\times\frac{0{,}15}{0{,}014} = 2{,}36\ \mathrm{m}$$

Pertanto, per raggiungere le condizioni soniche basterebbe aggiungere, a valle della sezione 2, un tratto di condotta lungo 2,36 m.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.60 Nella sezione di ingresso di una tubazione del diametro di 4 cm, lunga 15 m, una corrente d'aria ha $V_1 = 70$ m/s, $T_1 = 500$ K e $p_1 = 300$ kPa. Essendo il moto adiabatico e l'indice di resistenza medio pari a 0,023, calcolare il numero di Mach e la velocità nella sezione di uscita e la portata di massa.



Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** Lungo la condotta l'indice di resistenza si mantiene costante.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso, si ha

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1{,}4 \times 0{,}287 \times 1000 \times 500} = 448 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{70}{448} = 0{,}156 \text{ m/s}$$

e, per la 12.88,

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 = \frac{1 - \text{Ma}_1^2}{k\,\text{Ma}_1^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\,\text{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\text{Ma}_1^2} =$$

$$= \frac{1 - 0{,}156^2}{1{,}4 \times 0{,}156^2} + \frac{1{,}4+1}{2 \times 1{,}4} \times \ln \frac{(1{,}4+1) \times 0{,}156^2}{2 + 0{,}4 \times 0{,}156^2} =$$

$$= 25{,}6$$

Per la 12.89, l'analoga quantità nella sezione di uscita 2, vale

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \frac{\lambda_m L}{D_i} = 25{,}6 - \frac{0{,}023 \times 15}{0{,}04} = 17{,}0$$

valore in corrispondenza del quale la 12.88, risolta con un metodo iterativo, risulta soddisfatta per $\text{Ma}_2 = 0{,}187$. Nella sezione di ingresso si ha

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{300}{0{,}287 \times 500} = 2{,}09 \text{ kg/m}^3$$

per cui la portata di massa risulta

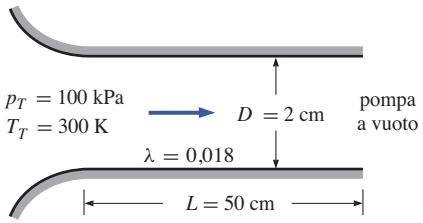
$$Q_m = \rho_1 A_1 V_1 = 2{,}09 \times \pi \times 0{,}04^2/4 \times 70 = 0{,}184 \text{ kg/s}$$

Discussione La lunghezza sonica della sezione 2 è

$$L_2^* = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 \frac{D_i}{\lambda_m} = 17{,}0 \times \frac{0{,}04}{0{,}023} = 29{,}6 \text{ m}$$

Pertanto, affinché il numero di Mach aumenti da 0,156 a 0,187 è necessaria una lunghezza di 15 m, mentre è sufficiente una lunghezza di 29,4 m perché il numero di Mach passi da 0,187 a 1. Ciò perché il numero di Mach, in prossimità delle condizioni soniche, aumenta molto rapidamente.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.61 In una stanza, l'aria a $T_T = 300$ K e $p_T = 100$ kPa viene aspirata da una pompa attraverso un tubicino, del diametro di 2 cm e lungo 50 cm, il cui imbocco è ben raccordato mediante un ugello convergente. Il moto può essere considerato isoentropico nell'ugello e adiabatico nel tubo; l'indice di resistenza medio è pari a 0,018. Calcolare la massima portata di massa che può essere aspirata e il numero di Mach all'ingresso del tubo.

Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** Lungo la condotta l'indice di resistenza si mantiene costante.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi La portata di massa massima si ha nelle condizioni di moto soffocato, per le quali nella sezione di uscita si ha $\mathrm{Ma}_2 = 1$, cioè condizioni soniche. Pertanto, la lunghezza $L = 0{,}50$ m della tubazione a monte di tale sezione coincide con la lunghezza L^*, data dalla 12.88, necessaria perché il fluido, partendo dallo stato definito dal numero di Mach Ma_1 raggiunga lo stato sonico. Si ha, pertanto,

$$\frac{\lambda_m L^*}{D_i} = \frac{0{,}018 \times 0{,}50}{0{,}02} = 0{,}45$$

valore in corrispondenza del quale la 12.88, risolta con un metodo iterativo, risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}611$.

Per l'ipotesi di moto isoentropico nell'ugello si ha $T_{T1} = T_T$ e $p_{T1} = p_T$, per cui i valori di temperatura e pressione nella sezione di ingresso, rispettivamente, per la 12.19 e la 12.20, risultano

$$T_1 = T_{T1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-1} = 300 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}611^2\right)^{-1} =$$

$$= 279 \text{ K}$$

e

$$p_1 = p_{T1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-k/(k-1)} =$$

$$= 100 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}611^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)} = 77{,}7 \text{ kPa}$$

La densità e la velocità valgono, rispettivamente,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{77{,}7}{0{,}287 \times 279} = 0{,}970 \text{ kg/m}^3$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

e

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1\, c_1 = \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kRT_1} = 0{,}611 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 279} =$$

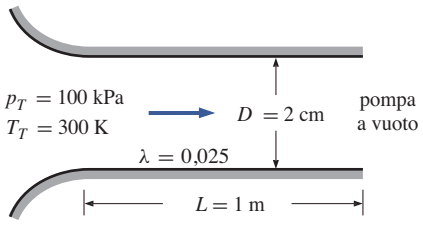
$$= 205 \text{ m/s}$$

per cui la portata di massa risulta

$$Q_m = \rho_1 A_1 V_1 = 0{,}970 \times \pi \times 0{,}02^2/4 \times 205 = 0{,}0625 \text{ kg/s}$$

Discussione Il valore calcolato è quello della portata massima che può defluire nella condotta per le assegnate condizioni all'ingresso. Tale valore non può aumentare neanche diminuendo ulteriormente la pressione all'uscita.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.62 Risolvere l'esercizio precedente nel caso di indice di resistenza medio di 0,025 e lunghezza del tubo di 1 m.

Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** Lungo la condotta l'indice di resistenza si mantiene costante.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi La portata di massa massima si ha nelle condizioni di moto soffocato, per le quali nella sezione di uscita si ha $\mathrm{Ma}_2 = 1$, cioè condizioni soniche. Pertanto, la lunghezza $L = 1{,}00$ m della tubazione a monte di tale sezione coincide con la lunghezza L^*, data dalla 12.88, necessaria perché il fluido, partendo dallo stato definito dal numero di Mach Ma_1 raggiunga lo stato sonico. Si ha, pertanto,

$$\frac{\lambda_m L^*}{D_i} = \frac{0{,}025 \times 1{,}00}{0{,}02} = 1{,}25$$

valore in corrispondenza del quale la 12.88, risolta con un metodo iterativo, risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}479$.

Per l'ipotesi di moto isoentropico nell'ugello si ha $T_{T1} = T_T$ e $p_{T1} = p_T$, per cui i valori di temperatura e pressione nella sezione di ingresso, rispettivamente, per la 12.19 e la 12.20, risultano

$$T_1 = T_{T1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-1} = 300 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}479^2\right)^{-1} =$$

$$= 287 \text{ K}$$

$$p_1 = p_{T1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{-k/(k-1)} =$$

$$= 100 \times \left(1 + \frac{1{,}4-1}{2} \times 0{,}479^2\right)^{-1{,}4/(1{,}4-1)} = 85{,}5 \text{ kPa}$$

La densità e la velocità valgono, rispettivamente,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{85{,}5}{0{,}287 \times 287} = 1{,}04 \text{ kg/m}^3$$

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1 c_1 = \mathrm{Ma}_1\sqrt{kRT_1} = 0{,}479 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 287} =$$

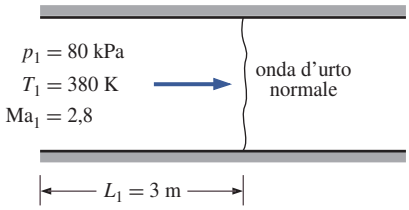
$$= 163 \text{ m/s}$$

per cui la portata di massa risulta

$$Q_m = \rho_1 A_1 V_1 = 1{,}04 \times \pi \times 0{,}02^2/4 \times 163 = 0{,}0533 \text{ kg/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.63 Nella sezione di ingresso di una tubazione del diametro di 5 cm, lunga 4 m, una corrente d'aria ha $p_1 = 80$ kPa, $T_1 = 380$ K e $\mathrm{Ma}_1 = 2{,}8$. A 3 m dall'ingresso, si forma un'onda d'urto normale. Essendo il moto adiabatico e l'indice di resistenza medio pari a 0,007, calcolare la velocità, la temperatura e la pressione nella sezione di uscita.



Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** Lungo la condotta l'indice di resistenza si mantiene costante.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 12.88, nella sezione di ingresso si ha

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 = \frac{1-\mathrm{Ma}_1^2}{k\,\mathrm{Ma}_1^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2} =$$

$$= \frac{1-2{,}8^2}{1{,}4\times 2{,}8^2} + \frac{2{,}4}{2\times 1{,}4}\times\ln\frac{2{,}4\times 2{,}8^2}{2+0{,}4\times 2{,}8^2} = 0{,}4898 \text{ m}$$

Pertanto, lo stato sonico si raggiunge in una sezione posta ad una distanza dalla sezione di ingresso pari a

$$L_1^* = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 \frac{D_i}{\lambda_m} = 0{,}04898 \times \frac{0{,}05}{0{,}007} = 3{,}50 \text{ m}$$

Tale distanza è maggiore della distanza $L_2 = 3$ m della sezione in corrispondenza della quale si forma l'onda d'urto. Pertanto, il moto a monte dell'onda d'urto è effettivamente supersonico. Per la 12.89, se $L = L_2 - L_1$ è la lunghezza del tratto compreso fra le sezioni 1 e 2 nelle quali il numero di Mach assume i valori Ma_1 e Ma_2, si ha

$$\left(\frac{\lambda_m L}{D_i}\right) = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2$$

Nella sezione posta subito a monte dell'onda d'urto, essendo $L = L_2 - L_1 = 3 - 0 = 3$ m, si ha

$$\frac{\lambda_m L}{D_i} = \frac{0{,}007\times 3}{0{,}05} = 0{,}420$$

e, per la 12.89,

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L}{D_i}\right) = 0{,}4898 - 0{,}420 = 0{,}0698$$

In corrispondenza di tale valore, la 12.88 risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 1{,}315$. Scrivendo la 12.91, rispettivamente, per la sezione 1 e

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

per la sezione 2 e dividendo membro a membro, si ottiene

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}$$

da cui

$$T_2 = T_1 \frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2} = 380 \times \frac{2 + 0{,}4 \times 2{,}8^2}{2 + 0{,}4 \times 1{,}315^2} = 725 \text{ K}$$

Analogamente, dalla 12.90

$$p_2 = p_1 \frac{\mathrm{Ma}_1}{\mathrm{Ma}_2} \sqrt{\frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}} =$$

$$= 80 \times \frac{2{,}8}{1{,}315} \times \sqrt{\frac{2 + (1{,}4-1) \times 2{,}8^2}{2 + (1{,}4-1) \times 1{,}315^2}} = 235 \text{ kPa}$$

Per la 12.38, il numero di Mach Ma_3 subito a valle dell'onda d'urto è

$$\mathrm{Ma}_3 = \sqrt{\frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_2^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \times 1{,}315^2 + 2}{2 \times 1{,}4 \times 1{,}315^2 - 0{,}4}} = 0{,}778$$

Rispettivamente, per la 12.37 e la 12.34, la pressione e la temperatura risultano

$$p_3 = p_2 \frac{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}{1 + k\mathrm{Ma}_3^2} = 235 \times \frac{1 + 1{,}4 \times 1{,}315^2}{1 + 1{,}4 \times 0{,}778^2} = 435 \text{ kPa}$$

$$T_3 = T_2 \frac{1 + \mathrm{Ma}_2^2\,(k-1)/2}{1 + \mathrm{Ma}_3^2\,(k-1)/2} = 725 \times \frac{1 + 1{,}315^2 \times 0{,}2}{1 + 0{,}778^2 \times 0{,}2} = 870 \text{ K}$$

A valle dell'onda d'urto, si ha ancora un flusso di Fanno fino alla sezione di uscita 4, dove il moto è sonico. Pertanto, scrivendo la 12.91 per la sezione 3 e per la sezione 4 e dividendo membro a membro si ottiene il rapporto fra le due temperature, da cui

$$T_4 = T_3 \frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_3^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_4^2} = 870 \times \frac{2 + 0{,}4 \times 0{,}778^2}{2 + 0{,}4 \times 1^2} = 813 \text{ K}$$

Analogamente, dalla 12.90,

$$p_4 = p_3 \frac{\mathrm{Ma}_3}{\mathrm{Ma}_4} \sqrt{\frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_3^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_4^2}} =$$

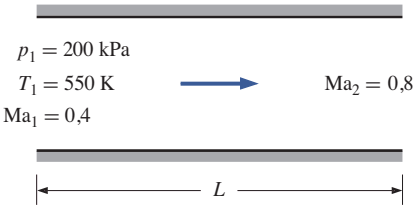
$$= 435 \times \frac{0{,}778}{1} \times \sqrt{\frac{2 + (1{,}4-1) \times 0{,}778^2}{2 + (1{,}4-1) \times 1^2}} = 327 \text{ kPa}$$

La velocità, infine, risulta

$$V_4 = \mathrm{Ma}_4\, c_4 = \mathrm{Ma}_4 \sqrt{kRT_4} = 1 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 813} = 572 \text{ m/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.64 Nella sezione di ingresso di una tubazione del diametro di 5 cm, una corrente d'aria ha $p_1 = 200$ kPa, $T_1 = 550$ K e $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}4$. Essendo il moto adiabatico, l'indice di resistenza medio pari a 0,016 e il numero di Mach all'uscita della tubazione pari a 0,8, calcolare la lunghezza della tubazione e la velocità, la temperatura e la pressione nella sezione di uscita.



Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** Lungo la condotta l'indice di resistenza si mantiene costante.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 12.88, nella sezione di ingresso 1 in cui $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}4$ e nella sezione di uscita 2 in cui $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}8$ si ha, rispettivamente,

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 = \frac{1-\mathrm{Ma}_1^2}{k\,\mathrm{Ma}_1^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2} = \\ = \frac{1-0{,}4^2}{1{,}4\times 0{,}4^2} + \frac{2{,}4}{2\times 1{,}4}\ln\frac{2{,}4\times 0{,}4^2}{2+0{,}4\times 0{,}4^2} = 2{,}31$$

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 = \frac{1-\mathrm{Ma}_2^2}{k\,\mathrm{Ma}_2^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2} = \\ = \frac{1-0{,}8^2}{1{,}4\times 0{,}8^2} + \frac{2{,}4}{2\times 1{,}4}\ln\frac{2{,}4\times 0{,}8^2}{2+0{,}4\times 0{,}8^2} = 0{,}0723$$

Per la 12.89, la lunghezza L della tubazione è

$$L = \left[\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2\right]\frac{D_i}{\lambda_m} = (2{,}31 - 0{,}0723)\times\frac{0{,}05}{0{,}016} = 6{,}99\ \mathrm{m}$$

Scrivendo la 12.91, rispettivamente, per la sezione 1 e per la sezione 2 e dividendo membro a membro si ottiene il rapporto fra le due temperature, da cui

$$T_2 = T_1\,\frac{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2} = 550\times\frac{2+0{,}4\times 0{,}4^2}{2+0{,}4\times 0{,}8^2} = 503\ \mathrm{K}$$

Analogamente, dalla 12.90,

$$p_2 = p_1\,\frac{\mathrm{Ma}_1}{\mathrm{Ma}_2}\sqrt{\frac{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}} = \\ = 200\times\frac{0{,}4}{0{,}8}\times\sqrt{\frac{2+(1{,}4-1)\times 0{,}4^2}{2+(1{,}4-1)\times 0{,}8^2}} = 95{,}7\ \mathrm{kPa}$$

La velocità, infine, risulta

$$V_2 = \mathrm{Ma}_2\,c_2 = \mathrm{Ma}_2\sqrt{kRT_2} = 0{,}8\times\sqrt{1{,}4\times 287\times 503} = 360\ \mathrm{m/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Riepilogo

12.65 Nella sezione di ingresso di una condotta a diametro variabile, una corrente di azoto ha $p_1 = 100$ kPa, $T_1 = 400$ K e $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}3$. Essendo il moto permanente e isoentropico, calcolare la temperatura, la pressione e il numero di Mach nella sezione di area ridotta del 20%.

Ipotesi **1** L'azoto si comporta come un gas ideale con $k = 1{,}4$. **2** Il moto attraverso l'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Analisi Per la 12.27, nella sezione di ingresso, in cui $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}3$, il rapporto tra l'area A_1 della sezione e l'area A^* della gola vale

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= \frac{1}{0{,}3}\times\left[\frac{2}{2{,}4}\times\left(1+\frac{0{,}4}{2}\times 0{,}3^2\right)\right]^{2{,}4/0{,}8} = 2{,}035$$

Nella sezione 2, di area ridotta del 20%, si ha $A_2 = 0{,}8A_1$. Pertanto,

$$\frac{A_2}{A^*} = 0{,}8\,\frac{A_1}{A^*} = 0{,}8\times 2{,}035 = 1{,}628$$

valore per il quale la 12.27 risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma} = 0{,}389$ e per $\mathrm{Ma} = 1{,}957$. Poiché la condotta è convergente e il moto nella sezione di ingresso è subsonico, va assunto il valore subsonico. Pertanto, $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}389$.

Per l'ipotesi di moto isoentropico, le grandezze di ristagno si mantengono costanti. Quindi, per la 12.20 e la 12.19, rispettivamente, la pressione e la temperatura nella sezione 2 risultano

$$p_2 = p_1\,\frac{p_2/p_T}{p_1/p_T} = p_1\,\frac{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-k/(k-1)}}{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-k/(k-1)}} =$$

$$= 100\times\left(\frac{1+0{,}4\times 0{,}389^2/2}{1+0{,}4\times 0{,}3^2/2}\right)^{-1{,}4/0{,}4} = 95{,}9\ \text{kPa}$$

$$T_2 = T_1\,\frac{T_2/T_T}{T_1/T_T} = T_1\,\frac{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-1}}{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-1}} =$$

$$= 400\times\left(\frac{1+0{,}4\times 0{,}389^2/2}{1+0{,}4\times 0{,}3^2/2}\right)^{-1} = 395\ \text{K}$$

Discussione In un ugello convergente, via via che il fluido accelera, diminuiscono sia la temperatura che la pressione .

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.66 Risolvere l'esercizio precedente per $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}6$.

Ipotesi **1** L'azoto si comporta come un gas ideale con $k = 1{,}4$. **2** Il moto attraverso l'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Analisi Per la 12.27, nella sezione di ingresso, in cui $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}5$, il rapporto tra l'area A_1 della sezione e l'area A^* della gola vale

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= \frac{1}{0{,}5}\times\left[\frac{2}{2{,}4}\times\left(1+\frac{0{,}4}{2}\times 0{,}5^2\right)\right]^{2{,}4/0{,}8} = 1{,}340$$

Nella sezione 2, di area ridotta del 20%, si ha $A_2 = 0{,}8A_1$. Pertanto,

$$\frac{A_2}{A^*} = 0{,}8\,\frac{A_1}{A^*} = 0{,}8\times 1{,}340 = 1{,}072$$

valore per il quale la 12.27 risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma} = 0{,}734$ e per $\mathrm{Ma} = 1{,}313$. Poiché la condotta è convergente e il moto nella sezione di ingresso è subsonico, va assunto il valore subsonico. Pertanto, $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}734$.

Per l'ipotesi di moto isoentropico, le grandezze di ristagno si mantengono costanti. Quindi, per la 12.20 e la 12.19, rispettivamente, la pressione e la temperatura nella sezione 2 risultano

$$p_2 = p_1\,\frac{p_2/p_T}{p_1/p_T} = p_1\,\frac{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-k/(k-1)}}{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-k/(k-1)}} =$$

$$= 100\times\left(\frac{1+0{,}4\times 0{,}734^2/2}{1+0{,}4\times 0{,}5^2/2}\right)^{-1{,}4/0{,}4} = 82{,}9\ \mathrm{kPa}$$

$$T_2 = T_1\,\frac{T_2/T_T}{T_1/T_T} = T_1\,\frac{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2/2]^{-1}}{[1+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2/2]^{-1}} =$$

$$= 400\times\left(\frac{1+0{,}4\times 0{,}734^2/2}{1+0{,}4\times 0{,}5^2/2}\right)^{-1} = 379\ \mathrm{K}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.67 La spinta sviluppata dal motore di un Boeing 777 vale circa 380 kN. Nell'ipotesi che il moto sia soffocato, calcolare la portata di massa d'aria negli ugelli quando la temperatura esterna è di 295 K e la pressione è di 95 kPa.

Ipotesi **1** L'aria e i gas combusti si comportano come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto dei gas combusti negli ugelli è isoentropico. **3** Nella sezione di imbocco la velocità è trascurabile. **4** Nella sezione di sbocco il moto è soffocato.

Proprietà Per i gas combusti la costante del gas e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}33$.

Analisi Nella sezione di sbocco il moto è soffocato, per cui $\mathrm{Ma}_2 = 1$. Pertanto, la velocità è

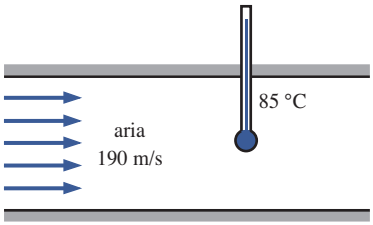
$$V_2 = \mathrm{Ma}_2\, c_2 = \mathrm{Ma}_2 \sqrt{kRT} = 1 \times \sqrt{1{,}33 \times 287 \times 295} =$$

$$= 335{,}6 \text{ m/s}$$

La spinta S sviluppata dal motore è pari al prodotto $Q_m V$, per cui la portata di massa risulta

$$Q_m = \frac{S}{V} = \frac{380\,000}{335{,}6} = 1130 \text{ kg/s}$$

Discussione I gas combusti sono composti soprattutto da azoto (presente nell'aria in una percentuale del 78% circa) e, pertanto, il loro comportamento può essere approssimato a quello dell'aria.



12.68 Una sonda termica viene inserita in una condotta nella quale defluisce aria alla velocità di 190 m/s. Se la sonda indica 85 °C, qual è la vera temperatura dell'aria?

Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il processo di ristagno è isoentropico.

Proprietà Il valore del calore specifico a pressione costante è $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K).

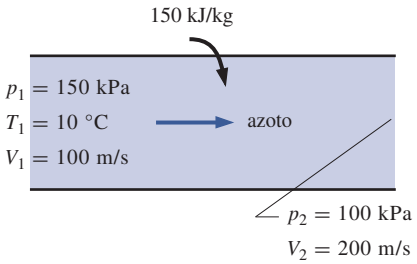
Analisi L'aria che colpisce la sonda si arresta completamente, per cui la temperatura misurata dalla sonda è la temperatura di ristagno T_T. Per la 12.5, la temperatura statica vale

$$T = T_T - \frac{V^2}{2c_p} = 85 - \frac{190^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 67{,}0\,^\circ\text{C}$$

Discussione In un processo di ristagno, se la velocità del fluido è piuttosto elevata l'aumento di temperatura è molto significativo e deve, pertanto, essere sempre messo in conto, a meno che gli effetti della comprimibilità siano trascurabili.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.69 Nella sezione di ingresso di uno scambiatore di calore, una corrente di azoto ha $p_1 = 150$ kPa, $T_1 = 10\,°C$ e $V_1 = 100$ m/s. Attraversando lo scambiatore in moto permanente, l'azoto riceve una quantità di calore pari a 150 kJ/kg; all'uscita ha una pressione di 100 kPa e una velocità di 200 m/s. Calcolare la pressione di ristagno e la temperatura di ristagno all'ingresso e all'uscita dello scambiatore.



Ipotesi **1** L'azoto si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto dell'azoto nello scambiatore è isoentropico.

Proprietà Il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $c_p = 1{,}039$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso dello scambiatore, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno, rispettivamente, per la 12.5 e la 12.7, valgono

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 10 + \frac{100^2}{2 \times 1{,}039 \times 1000} = 14{,}8\ °C$$

$$p_{T1} = p_1 \left(\frac{T_{T1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 150 \times \left(\frac{14{,}8 + 273{,}2}{10 + 273{,}2}\right)^{1{,}4/0{,}4} = 159\ \text{kPa}$$

Per la 12.10, essendo $q_c = q_1 - q_2 = 150$ kJ/kg il calore ricevuto dal fluido, si ha

$$q_c = c_p(T_{T2} - T_{T1})$$

da cui

$$T_{T2} = T_{T1} + \frac{q_c}{c_p} = 14{,}8 + \frac{150}{1{,}039} = 159{,}2\ °C$$

Per la 12.5, la temperatura nella sezione di uscita risulta

$$T_2 = T_{T2} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 159 - \frac{200^2}{2 \times 1{,}039 \times 1000} = 139{,}9\ °C$$

Per la 12.7, la pressione di ristagno vale

$$p_{T2} = p_2 \left(\frac{T_{T2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = 100 \times \left(\frac{159{,}2 + 273{,}2}{139{,}9 + 273{,}2}\right)^{1{,}4/0{,}4} =$$

$$= 117\ \text{kPa}$$

Discussione Per velocità elevate, i valori di ristagno possono essere notevolmente diversi dai corrispondenti valori statici.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.70 Un aereo viaggia in moto subsonico alla quota di 5000 m, dove la pressione vale 54 kPa e la temperatura 256 K. Un tubo di Pitot misura una differenza di 22 kPa tra la pressione di ristagno e la pressione statica. Calcolare la velocità dell'aereo e il numero di Mach.

Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il processo di ristagno è isoentropico.

Proprietà Per l'aria la costante del gas e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Per la 12.20, il rapporto tra la pressione di ristagno e la pressione statica è funzione del numero di Mach. Si ha, infatti,

$$\frac{p_T}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{k/(k-1)}$$

da cui

$$\mathrm{Ma} = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_T}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1{,}4-1} \times \left[\left(\frac{54+22}{54}\right)^{(1{,}4-1)/1{,}4} - 1\right]} = 0{,}716$$

Pertanto, la velocità dell'aereo è

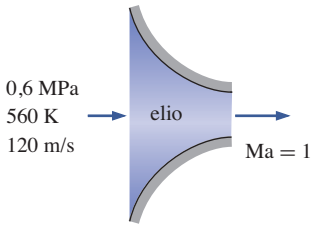
$$V = \mathrm{Ma}\, c = \mathrm{Ma}\sqrt{kRT} = 0{,}716 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 256} =$$

$$= 230 \text{ m/s}$$

Discussione Misurando una differenza di pressione, si può ottenere la velocità in maniera semplice e accurata.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.71 Nella sezione di ingresso di un ugello, una corrente di elio ha $p_1 = 0{,}6$ MPa, $T_1 = 560$ K e $V_1 = 120$ m/s. Considerando il moto isoentropico, calcolare la temperatura e la pressione dell'elio nella sezione in cui la velocità è pari a quella del suono. Che rapporto c'è tra l'area di tale sezione e l'area della sezione di ingresso?



Ipotesi **1** L'elio si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto nell'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà Per l'elio la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 2{,}0769$ kJ/(kg · K), $c_p = 5{,}1926$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}667$.

Analisi Nella sezione di ingresso, rispettivamente, per la 12.5 e la 12.7, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno valgono

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 560 + \frac{120^2}{2 \times 5{,}1926 \times 1000} = 561{,}4 \text{ K}$$

$$p_{T1} = p_1 \left(\frac{T_{T1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}6 \times \left(\frac{561{,}4}{560}\right)^{1{,}667/0{,}667} = 0{,}6038 \text{ MPa}$$

Per l'ipotesi di moto isoentropico, tali valori rimangono costanti lungo l'ugello. Nella sezione terminale dell'ugello la velocità è pari a quella del suono, per cui si ha $\text{Ma}_2 = 1$ mentre la temperatura e la pressione assumono i valori critici, che, rispettivamente, per la 12.22 e la 12.23, risultano

$$T^* = T_T \frac{2}{k+1} = 561{,}4 \times \frac{2}{1{,}667+1} = 421{,}0 \text{ K}$$

$$p^* = p_T \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}6038 \times \left(\frac{2}{2{,}667}\right)^{1{,}667/0{,}667} =$$

$$= 0{,}2941 \text{ MPa}$$

Nella sezione di ingresso, il numero di Mach vale

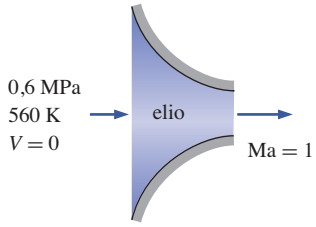
$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{120}{\sqrt{1{,}667 \times 2{,}0769 \times 1000 \times 560}} = 0{,}0862$$

per cui, per la 12.27, il rapporto tra l'area della gola (in cui $\text{Ma}_2 = 1$) e l'area della sezione di ingresso risulta

$$\frac{A^*}{A_1} = \text{Ma}_1 \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)\right]^{-(k+1)/[2(k-1)]} =$$

$$= 0{,}0862 \times \left[\frac{2}{2{,}667}\left(1 + \frac{0{,}667}{2} \times 0{,}0862^2\right)\right]^{-2{,}667/(2\times 0{,}667)} = 0{,}153$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.72 Risolvere l'esercizio precedente per il caso di velocità all'ingresso trascurabile.

Ipotesi **1** L'elio si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto nell'ugello è permanente, unidimensionale e isoentropico.

Proprietà Per l'elio la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 2{,}0769$ kJ/(kg · K), $c_p = 5{,}1926$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}667$.

Analisi Nella sezione di ingresso, essendo la velocità trascurabile, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno coincidono con i valori statici

$$T_{T1} = T_1 = 560 \text{ K}$$

$$p_{T1} = p_1 = 0{,}6 \text{ MPa}$$

Per l'ipotesi di moto isoentropico, tali valori rimangono costanti lungo l'ugello. Nella sezione terminale dell'ugello la velocità è pari a quella del suono, per cui si ha $\text{Ma}_2 = 1$ mentre la temperatura e la pressione assumono i valori critici, che, rispettivamente, per la 12.22 e la 12.23, risultano

$$T^* = T_T \frac{2}{k+1} = 560 \times \frac{2}{1{,}667+1} = 419{,}9 \text{ K}$$

$$p^* = p_T \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0{,}6 \times \left(\frac{2}{2{,}667}\right)^{1{,}667/0{,}667} =$$

$$= 0{,}2923 \text{ MPa}$$

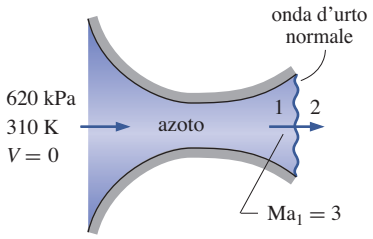
Nella sezione di ingresso, essendo la velocità trascurabile, si ha $\text{Ma}_1 \cong 0$, per cui, per la 12.27, il rapporto tra l'area della gola (in cui $\text{Ma}_2 = 1$) e l'area della sezione di ingresso risulta

$$\frac{A^*}{A_1} = \text{Ma}_1 \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\text{Ma}_1^2\right)\right]^{-(k+1)/[2(k-1)]} \cong 0$$

Pertanto, essendo $A_1/A^* \cong 1/0 = \infty$, l'area della sezione di ingresso è molto più grande dell'area della gola.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.73 Nella sezione di ingresso di un ugello convergente-divergente, una corrente di azoto ha una temperatura di 310 K e una pressione di 620 kPa. In una sezione in cui il numero di Mach è pari a 3,0 si forma un'onda d'urto normale. Calcolare la temperatura, la pressione, la velocità, il numero di Mach e la pressione di ristagno a valle dell'onda d'urto e confrontare tali valori con quelli di una corrente d'aria nelle stesse condizioni.



Ipotesi **1** L'azoto si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto nell'ugello è permanente, unidimensionale, isoentropico e adiabatico. **3** Nella sezione di ingresso la velocità è trascurabile.

Proprietà Per l'azoto la costante del gas e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}297$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$. Per l'aria si ha $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso, essendo la velocità trascurabile, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno coincidono con i valori statici

$$T_{Ti} = T_i = 310 \text{ K}$$

$$p_{Ti} = p_i = 620 \text{ kPa}$$

Per l'ipotesi di moto isoentropico, tali valori rimangono costanti lungo l'ugello, per cui nella sezione 1 a monte dell'onda d'urto si ha $T_{T1} = T_{Ti}$ e $p_{T1} = p_{Ti}$. Per $\mathrm{Ma}_1 = 3{,}0$ la temperatura e la pressione, rispettivamente per la 12.19 e la 12.17, risultano

$$T_1 = \frac{2\,T_{T1}}{2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2} = \frac{2 \times 310}{2 + (1{,}4 - 1) \times 3{,}0^2} = 110{,}7 \text{ K}$$

$$p_1 = p_{T1}\left(\frac{T_1}{T_{T1}}\right)^{k/(k-1)} = 620 \times \left(\frac{110{,}7}{310}\right)^{1{,}4/0{,}4} = 16{,}9 \text{ kPa}$$

Nella sezione 2 a valle dell'onda d'urto, per la 12.38, si ha

$$\mathrm{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{(1{,}4 - 1) \times 3{,}0^2 + 2}{2 \times 1{,}4 \times 3{,}0^2 - 1{,}4 + 1}} = 0{,}475$$

Rispettivamente, per la 12.34, la 12.37 e la 12.20, la temperatura, la pressione e la pressione di ristagno risultano

$$T_2 = T_1\,\frac{1 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)/2}{1 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)/2} = 110{,}7 \times \frac{1 + 3{,}0^2 \times (1{,}4 - 1)/2}{1 + 0{,}475^2 \times (1{,}4 - 1)/2} =$$

$$= 297 \text{ K}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

$$p_2 = p_1 \frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2} = 16{,}9 \times \frac{1 + 1{,}4 \times 3{,}0^2}{1 + 1{,}4 \times 0{,}475^2} = 175 \text{ kPa}$$

$$p_{T2} = p_2 \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)} =$$

$$= 175 \times \left(1 + \frac{1{,}4 - 1}{2} \times 0{,}475^2\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 204 \text{ kPa}$$

La velocità risulta

$$V_2 = \mathrm{Ma}_2\, c_2 = \mathrm{Ma}_2 \sqrt{kRT_2} = 0{,}475 \times \sqrt{1{,}4 \times 297 \times 297} =$$

$$= 167 \text{ m/s}$$

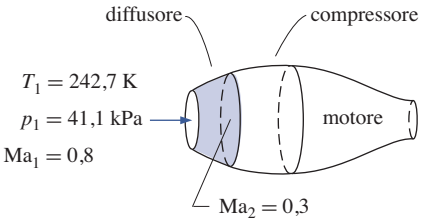
Nel caso di aria, rispetto all'azoto cambia solo il valore della costante del gas R che appare unicamente nell'espressione della velocità del suono. Pertanto, l'unico risultato diverso è quello relativo alla velocità che, a valle dell'onda, risulta

$$V_2 = \mathrm{Ma}_2\, c_2 = \mathrm{Ma}_2 \sqrt{kRT_2} = 0{,}475 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 297} =$$

$$= 164 \text{ m/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.74 Un aereo viaggia a Mach 0,8 alla quota di 7000 m, dove la pressione vale 41,1 kPa e la temperatura 242,7 K. Nel diffusore all'ingresso del motore il numero di Mach allo sbocco è 0,3. Calcolare l'aumento di pressione statica nel diffusore e l'area della sezione di sbocco per una portata di 65 kg/s.



Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto nel diffusore è permanente, unidimensionale, isoentropico e adiabatico.

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso del diffusore, rispettivamente, per la 2.41, la 12.5 e la 12.7, la velocità, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno valgono

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1 c_1 = \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kRT_1} = 0{,}8 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 242{,}7} =$$

$$= 249{,}8 \text{ m/s}$$

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 242{,}7 + \frac{249{,}8^2}{2 \times 1005} = 273{,}7 \text{ K}$$

$$p_{T1} = p_1 \left(\frac{T_{T1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = 41{,}1 \times \left(\frac{273{,}7}{242{,}7}\right)^{1{,}4/(1{,}4-1)} = 62{,}6 \text{ kPa}$$

Per ipotesi, il fluido non scambia lavoro né calore con l'esterno, per cui, trascurando le variazioni di energia potenziale e introducendo l'entalpia, l'equazione dell'energia 5.99 diviene

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = \text{costante}$$

Per un gas perfetto con calori specifici costanti, per la seconda delle 2.12, si ha $\Delta h = c_p \Delta T$, per cui l'equazione precedente diviene

$$T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} = \text{costante}$$

o, per la 12.5,

$$T_{T1} = T_{T2} = \text{costante}$$

Essendo il moto isoentropico, nella sezione terminale del diffusore la pressione di ristagno, per la 12.7, vale

$$p_{T2} = p_2 \left(\frac{T_{T2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

e, introducendo la 12.6,

$$p_{T2} = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\frac{T_{T2}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = p_1 \left(\frac{T_{T2}}{T_1}\right)^{k/(k-1)}$$

Essendo $T_{T1} = T_{T2}$, si ha, infine,

$$p_{T2} = p_1 \left(\frac{T_{T1}}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = p_{T1} = 62{,}6 \text{ kPa}$$

La velocità può essere espressa come

$$V_2 = \text{Ma}_2\, c_2 = \text{Ma}_2\sqrt{k R T_2} = 0{,}3 \times \sqrt{1{,}4 \times 287}\,\sqrt{T_2} =$$

$$= 6{,}01\,\sqrt{T_2} \text{ m/s}$$

La temperatura statica, per la 12.5, risulta

$$T_2 = T_{T2} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 273{,}7 - \frac{6{,}01^2}{2 \times 1005}\,T_2$$

da cui

$$T_2 = \frac{273{,}7}{1 + \dfrac{6{,}01^2}{2 \times 1005}} = 268{,}9 \text{ K}$$

La pressione statica, per la 12.7, risulta

$$p_2 = p_{T2}\left(\frac{T_2}{T_{T2}}\right)^{k/(k-1)} = 62{,}6 \times \left(\frac{268{,}9}{273{,}7}\right)^{1{,}4/0{,}4} = 58{,}8 \text{ kPa}$$

Lungo il diffusore la pressione, pertanto, aumenta di

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 58{,}8 - 41{,}1 = 17{,}7 \text{ kPa}$$

Essendo, infine,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{58{,}8}{0{,}287 \times 268{,}9} = 0{,}762 \text{ kg/m}^3$$

e

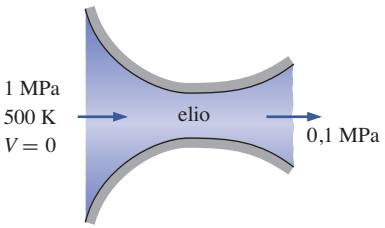
$$V_2 = 6{,}01\,\sqrt{T_2} = 6{,}01 \times \sqrt{268{,}9} = 98{,}6 \text{ m/s}$$

l'area della sezione terminale del diffusore risulta

$$A_2 = \frac{Q_m}{\rho_2 V_2} = \frac{65}{0{,}762 \times 98{,}6} = 0{,}865 \text{ m}^2$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.75 In un ugello, una corrente di elio si espande passando da velocità trascurabile, temperatura di 500 K e pressione di 1 MPa alla pressione di 0,1 MPa. Considerando il moto isoentropico, calcolare l'area della gola e l'area della sezione di uscita per una portata di 0,46 kg/s e spiegare perché l'ugello deve essere convergente-divergente.



Ipotesi **1** L'elio si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto nell'ugello è permanente, unidimensionale, isoentropico e adiabatico.

Proprietà Per l'elio la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 2{,}0769$ kJ/(kg · K), $c_p = 5{,}1926$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}667$.

Analisi Nella sezione di ingresso, essendo la velocità trascurabile, la temperatura di ristagno e la pressione di ristagno coincidono con i valori statici

$$T_{T1} = T_1 = 500 \text{ K}$$

$$p_{T1} = p_1 = 1 \text{ MPa}$$

Per l'ipotesi di moto isoentropico, tali valori rimangono costanti lungo l'ugello per cui nella sezione di uscita 2 si ha $T_{T2} = T_{T1}$ e $p_{T2} = p_{T1}$. Nella gola il moto avviene in condizioni critiche. Rispettivamente, per la 12.22 e la 12.23, la temperatura critica e la pressione critica risultano

$$T^* = T_T \frac{2}{k+1} = 500 \times \frac{2}{1{,}667+1} = 375 \text{ K}$$

$$p^* = p_T \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 1 \times \left(\frac{2}{1{,}667+1}\right)^{1{,}667/(1{,}667-1)} =$$

$$= 0{,}487 \text{ MPa}$$

Essendo

$$V^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{1{,}667 \times 2076{,}9 \times 375} = 1139 \text{ m/s}$$

e, per l'equazione di stato,

$$\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = \frac{487}{2{,}0769 \times 375} = 0{,}625 \text{ kg/m}^3$$

l'area della gola risulta

$$A^* = \frac{Q_m}{\rho^* V^*} = \frac{0{,}46}{0{,}625 \times 1139} = 6{,}46 \text{ cm}^2$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Nota la pressione $p_2 = 0,1$ MPa nella sezione di uscita, per la 12.20 si ha

$$\frac{p_T}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

da cui

$$\mathrm{Ma}_2 = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_T}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2}{0,667} \times \left[\left(\frac{1}{0,1}\right)^{\frac{0,667}{1,667}} - 1\right]} =$$

$$= 2,13$$

Essendo $\mathrm{Ma}_2 > 1$, l'ugello deve necessariamente essere convergente-divergente. Per la 12.19, si ha

$$T_2 = \frac{2\,T_T}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2} = \frac{2 \times 500}{2 + (1,667 - 1) \times 2,13^2} = 199\ \mathrm{K}$$

Essendo

$$V_2 = \mathrm{Ma}_2\, c_2 = \mathrm{Ma}_2\sqrt{kRT_2} = 2,13 \times \sqrt{1,667 \times 2076,9 \times 199} =$$

$$= 1768\ \mathrm{m/s}$$

e, per l'equazione di stato,

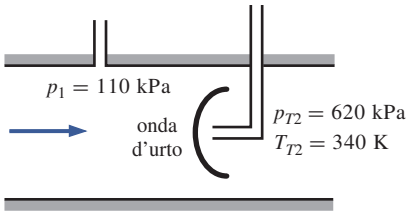
$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{100}{2,0769 \times 199} = 0,242\ \mathrm{kg/m^3}$$

l'area della sezione di uscita risulta

$$A_2 = \frac{Q_m}{\rho_2 V_2} = \frac{0,46}{0,242 \times 1768} = 10,8\ \mathrm{cm^2}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.76 Il tubo di Pitot può essere usato per effettuare misure di velocità anche in un fluido comprimibile, purché si usi una relazione che tenga conto della comprimibilità. Usare la relazione valida per i fluidi incomprimibili può comportare, infatti, errori grossolani. Si consideri un tubo di Pitot inserito in una corrente d'aria in moto supersonico. La presenza del tubo causa la formazione di un'onda d'urto a monte di esso. Calcolare la velocità, sapendo che la pressione di ristagno e la temperatura di ristagno sono, rispettivamente, pari a 620 kPa e a 340 K e che la pressione statica a monte del tubo è di 110 kPa.



Ipotesi **1** L'aria si comporta come un gas ideale con calori specifici costanti. **2** Il moto dell'aria è permanente e unidimensionale.

Proprietà Il rapporto tra i calori specifici dell'aria è $k = 1{,}4$.

Analisi La parte frontale del tubo di Pitot è arrotondata e, pertanto, a monte di essa si forma un'onda d'urto obliqua, la cui analisi è molto complessa. Tuttavia, subito a monte del punto di ristagno, può essere considerata come un'onda d'urto normale. Attraverso l'onda d'urto la temperatura di ristagno si mantiene costante, per cui la temperatura di ristagno T_{T1} nella sezione 1 a monte dell'onda d'urto è uguale alla temperatura di ristagno $T_{T2} = 340$ K nella sezione 2 a valle di essa. Essendo note la pressione di ristagno p_{T2} a valle dell'onda d'urto e la pressione statica p_1 a monte di essa, è possibile calcolare il numero di Mach a monte e a valle dell'onda d'urto. Per la 12.20 si ha

$$\frac{p_{T2}}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

e, dividendo per p_1,

$$\frac{p_{T2}}{p_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)} \tag{1}$$

Eguagliando la 12.36 e la 12.37, si ha

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mathrm{Ma}_1\sqrt{1 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)/2}}{\mathrm{Ma}_2\sqrt{1 + \mathrm{Ma}_2^2(k-1)/2}} = \frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}$$

da cui, risolvendo in funzione di Ma_1, si ottiene la relazione analoga alla 12.38

$$\mathrm{Ma}_1 = \sqrt{\frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_2^2 - k + 1}} \tag{2}$$

Introducendo tale espressione, la 12.37 diviene

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2} = \frac{k+1}{2k\mathrm{Ma}_2^2 - k + 1}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Sostituendo nella (1), si ha

$$\frac{p_{T2}}{p_1} = \frac{k+1}{2k\mathrm{Ma}_2^2 - k + 1}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)} \tag{3}$$

relazione che, conoscendo il valore a primo membro, consente di determinare il valore di Ma_2. Per

$$\frac{p_{T2}}{p_1} = \frac{620}{110} = 5{,}6364$$

la (3) è soddisfatta dal valore $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}5775$. A monte dell'onda d'urto, per la (2) si ha

$$\mathrm{Ma}_1 = \sqrt{\frac{(k-1)\mathrm{Ma}_2^2 + 2}{2k\mathrm{Ma}_2^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{(1{,}4-1)\times 0{,}5775^2 + 2}{2\times 1{,}4\times 0{,}5775^2 - 1{,}4 + 1}} = 2{,}0$$

Per la 12.19, la temperatura risulta

$$T_1 = \frac{T_{T1}}{1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2} = \frac{340}{1 + (1{,}4-1)\times 2{,}0^2/2} = 189\,\mathrm{K}$$

per cui la velocità vale

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1\, c_1 = \mathrm{Ma}_1\sqrt{kRT_1} = 2{,}0\times\sqrt{1{,}4\times 287\times 189} = 551\ \mathrm{m/s}$$

Discussione Per la 12.30, introducendo l'equazione di stato dei gas perfetti 2.4, si ha

$$V_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}V_1 = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}V_1$$

Rispettivamente, per la 12.37 e la 12.34, si ha

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}{1 + k\mathrm{Ma}_1^2} = \frac{1 + 1{,}4\times 0{,}5775^2}{1 + 1{,}4\times 2{,}0^2} = 0{,}2223$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \mathrm{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \mathrm{Ma}_2^2\,(k-1)} = \frac{2 + 2{,}0^2\times(1{,}4-1)}{2 + 0{,}5775^2\times(1{,}4-1)} = 1{,}687$$

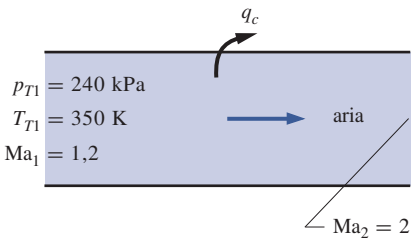
per cui

$$V_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}V_1 = 0{,}22226\times 1{,}6874\times 551 = 207\ \mathrm{m/s}$$

Pertanto, la formazione dell'onda d'urto fa sì che che la velocità misurata dal tubo di Pitot sia notevolmente diversa da quella del fluido.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.77 Nella sezione di ingresso di una tubazione del diametro di 20 cm, una corrente d'aria ha $p_{T1} = 240$ kPa, $T_{T1} = 350$ K e $\mathrm{Ma}_1 = 1{,}2$. Durante il moto, l'aria viene raffreddata. La resistenza delle pareti è trascurabile. Calcolare la quantità di calore sottratta all'aria, per unità di tempo, sapendo che il numero di Mach all'uscita è $\mathrm{Ma}_2 = 2{,}0$.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Rispettivamente, per la 12.19 e la 12.20, nella sezione di ingresso la temperatura statica e la pressione statica risultano

$$T_1 = \frac{T_{T1}}{1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2} = \frac{350}{1 + (1{,}4-1) \times 1{,}2^2/2} = 271{,}7\,\mathrm{K}$$

$$p_1 = \frac{p_{T1}}{[1 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2/2]^{k/(k-1)}} = \frac{240}{(1 + 0{,}2 \times 1{,}2^2)^{1{,}4/0{,}4}} =$$

$$= 98{,}97\,\mathrm{kPa}$$

La velocità vale

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1\, c_1 = \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kRT_1} = 1{,}2 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 271{,}7} =$$

$$= 396{,}5\ \mathrm{m/s}$$

Essendo, per l'equazione di stato 2.4,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{98{,}97}{0{,}287 \times 271{,}7} = 1{,}269\ \mathrm{kg/m^3}$$

la portata di massa risulta

$$Q_m = \rho_1 A V_1 = 1{,}269 \times \pi \times 0{,}20^2/4 \times 396{,}5 = 15{,}81\ \mathrm{kg/s}$$

La quantità di calore q_c che, per unità di massa, l'aria scambia con l'esterno è funzione della differenza fra le temperature di ristagno nelle sezioni di ingresso e di uscita. Infatti, per la 12.54,

$$q_c = c_p\,(T_{T2} - T_{T1})$$

La temperatura di ristagno adimensionale è funzione solo del nu-

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

mero di Mach, essendo, per la 12.67,

$$\frac{T_T}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}^2\left[2+(k-1)\mathrm{Ma}^2\right]}{\left(1+k\mathrm{Ma}^2\right)^2}$$

Rispettivamente, nella sezione di ingresso e in quella di uscita si ha

$$\frac{T_{T1}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\left[2+(k-1)\mathrm{Ma}_1^2\right]}{\left(1+k\mathrm{Ma}_1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1{,}4+1)\times 1{,}2^2\times\left[2+(1{,}4-1)\times 1{,}2^2\right]}{\left(1+1{,}4\times 1{,}2^2\right)^2} = 0{,}9787$$

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2\left[2+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2\right]}{\left(1+k\mathrm{Ma}_2^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1{,}4+1)\times 2{,}0^2\times\left[2+(1{,}4-1)\times 2{,}0^2\right]}{\left(1+1{,}4\times 2{,}0^2\right)^2} = 0{,}7934$$

per cui

$$T_{T2} = \frac{T_{T2}}{T_T^*}\,\frac{T_T^*}{T_{T1}}\,T_{T1} = \frac{0{,}7934}{0{,}9787}\times 350 = 283{,}7\ \mathrm{K}$$

e, conseguentemente,

$$q_c = c_p\,(T_{T2}-T_{T1}) = 1{,}005\times(283{,}7-350) = -66{,}6\ \mathrm{kJ/kg}$$

La quantità di calore scambiata dall'aria, nell'unità di tempo, risulta

$$Q_m q_c = 15{,}81\times(-66{,}6) = -1053\ \mathrm{kW}$$

Discussione Il segno negativo conferma che si tratta di calore sottratto all'aria per aumentarne la velocità. Infatti, per la 12.19, nella sezione di uscita la temperatura statica vale

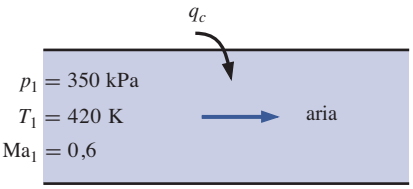
$$T_2 = \frac{T_{T2}}{1+(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2/2} = \frac{284}{1+(1{,}4-1)\,2{,}0^2/2} = 157{,}6\ \mathrm{K}$$

per cui la velocità risulta

$$V_2 = \mathrm{Ma}_2\,c_2 = \mathrm{Ma}_2\sqrt{kRT_2} = 2{,}0\times\sqrt{1{,}4\times 287\times 157{,}6} =$$

$$= 503{,}3\ \mathrm{m/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.



12.78 Una corrente di aria che defluisce in una condotta di 10 × 10 cm di lato viene riscaldata lungo il percorso. Nella sezione di ingresso si ha $p_1 = 350$ kPa, $T_1 = 420$ K e $\mathrm{Ma}_1 = 0{,}6$. Trascurando la resistenza delle pareti, calcolare la massima quantità di calore che può essere trasferita all'aria per unità di tempo, senza che le condizioni all'ingresso vengano influenzate.

Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Le condizioni di moto nella sezione di ingresso non cambiano finché il moto non diventa soffocato, cioè finché nella sezione di uscita non si ha $\mathrm{Ma}_2 = 1$. Nella sezione di ingresso la velocità e la densità valgono

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1\, c_1 = \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kRT_1} = 0{,}6 \times \sqrt{1{,}4 \times 287 \times 420} =$$

$$= 246{,}5 \text{ m/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{350}{0{,}287 \times 420} = 2{,}904 \text{ kg/m}^3$$

per cui la portata di massa risulta

$$Q_m = \rho_1 A V_1 = 2{,}904 \times 0{,}1^2 \times 246{,}5 = 7{,}157 \text{ kg/s}$$

La quantità di calore q_c che, per unità di massa, l'aria scambia con l'esterno è funzione della differenza fra le temperature di ristagno nelle sezioni di ingresso e di uscita. Infatti, per la 12.54,

$$q_c = c_p\,(T_{T2} - T_{T1})$$

Nella sezione di ingresso, per la 12.5, la temperatura di ristagno vale

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 420 + \frac{246{,}5^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 450{,}2 \text{ K}$$

e, per la 12.67,

$$\frac{T_{T1}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\left[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2\right]}{\left(1 + k\mathrm{Ma}_1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1{,}4+1) \times 0{,}6^2 \times \left[2 + (1{,}4-1) \times 0{,}6^2\right]}{\left(1 + 1{,}4 \times 0{,}6^2\right)^2} = 0{,}8189$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

Nella sezione di uscita, per definizione, si ha

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = 1$$

per cui

$$T_{T2} = \frac{T_{T2}}{T_T^*}\,\frac{T_T^*}{T_{T1}}\,T_{T1} = \frac{1}{0{,}8189} \times 450{,}2 = 549{,}8 \text{ K}$$

e, conseguentemente,

$$q_c = c_p\,(T_{T2} - T_{T1}) = 1{,}005 \times (549{,}8 - 450{,}2) = 100{,}0 \text{ kJ/kg}$$

La quantità di calore ricevuta dall'aria, nell'unità di tempo, risulta

$$Q_m q_c = 7{,}157 \times 100{,}0 = 716 \text{ kW}$$

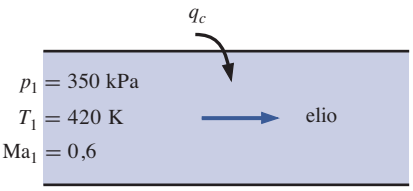
Discussione Nella sezione di uscita, la temperatura statica, che, per la 12.19, è

$$T_2 = \frac{T_{T2}}{1 + (k-1)\,\text{Ma}_2^2/2} = \frac{549{,}8}{1 + (1{,}4 - 1) \times 1^2/2} = 458{,}1 \text{ K}$$

raggiunge il valore massimo per le condizioni assegnate. Un ulteriore riscaldamento del fluido darebbe luogo ad una diminuzione della portata di massa.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.79 Risolvere l'esercizio precedente per il caso in cui il fluido sia elio.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'elio la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 2{,}077$ kJ/(kg · K), $c_p = 5{,}193$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}667$.

Analisi Le condizioni di moto nella sezione di ingresso non cambiano finché il moto non diventa soffocato, cioè finché nella sezione di uscita non si ha $\mathrm{Ma}_2 = 1$. Nella sezione di ingresso la velocità e la densità valgono

$$V_1 = \mathrm{Ma}_1\, c_1 = \mathrm{Ma}_1 \sqrt{kRT_1} = 0{,}6 \times \sqrt{1{,}667 \times 2077 \times 420} =$$

$$= 723{,}5 \text{ m/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{350}{2{,}207 \times 420} = 0{,}4012 \text{ kg/m}^3$$

per cui la portata di massa risulta

$$Q_m = \rho_1 A V_1 = 0{,}4012 \times 0{,}1^2 \times 723{,}5 = 2{,}903 \text{ kg/s}$$

La quantità di calore q_c che, per unità di massa, l'elio scambia con l'esterno è funzione della differenza fra le temperature di ristagno nelle sezioni di ingresso e di uscita. Infatti, per la 12.54,

$$q_c = c_p\,(T_{T2} - T_{T1})$$

Nella sezione di ingresso, per la 12.5, la temperatura di ristagno vale

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 420 + \frac{723{,}5^2}{2 \times 5{,}193 \times 1000} = 470{,}4 \text{ K}$$

e, per la 12.67,

$$\frac{T_{T1}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\left[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2\right]}{\left(1 + k\mathrm{Ma}_1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1{,}667+1) \times 0{,}6^2 \times \left[2 + (1{,}667-1) \times 0{,}6^2\right]}{\left(1 + 1{,}667 \times 0{,}6^2\right)^2} = 0{,}8400$$

Nella sezione di uscita, per definizione, si ha

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = 1$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

per cui

$$T_{T2} = \frac{T_{T2}}{T_T^*}\,\frac{T_T^*}{T_{T1}}\,T_{T1} = \frac{1}{0{,}8400} \times 470{,}4 = 560{,}0 \text{ K}$$

e, conseguentemente,

$$q_c = c_p\,(T_{T2} - T_{T1}) = 5{,}193 \times (560{,}0 - 470{,}4) = 465{,}2 \text{ kJ/kg}$$

La quantità di calore ricevuta dall'elio, nell'unità di tempo, risulta

$$Q_m q_c = 2{,}903 \times 465{,}2 = 1350 \text{ kW}$$

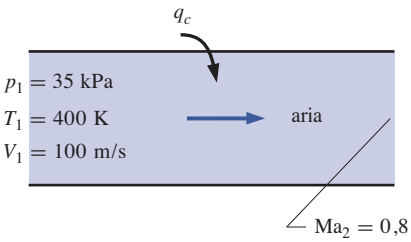
Discussione Nella sezione di uscita, la temperatura statica, che, per la 12.19, è

$$T_2 = \frac{T_{T2}}{1 + (k-1)\,\text{Ma}_2^2/2} = \frac{560{,}0}{1 + (1{,}667 - 1) \times 1^2/2} = 419{,}9 \text{ K}$$

raggiunge il valore massimo per le condizioni assegnate. Un ulteriore riscaldamento del fluido darebbe luogo ad una diminuzione della portata di massa.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.80 Una corrente di aria che defluisce in un condotto con resistenze trascurabili viene riscaldata per farne aumentare la velocità. All'ingresso, si ha $V_1 = 100$ m/s, $T_1 = 400$ K e $p_1 = 35$ kPa, mentre all'uscita $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}8$. Calcolare la quantità di calore ceduta all'aria, in kJ/kg, e la massima quantità di calore che può essere trasferita all'aria senza ridurne la portata.



Ipotesi Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Rayleigh (moto permanente e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante con resistenze trascurabili).

Proprietà Per l'aria la costante del gas, il calore specifico a pressione costante e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}287$ kJ/(kg · K), $c_p = 1{,}005$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}4$.

Analisi Nella sezione di ingresso, rispettivamente, per la 2.41 e la 12.5, il numero di Mach e la temperatura di ristagno valgono

$$\mathrm{Ma}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{100}{\sqrt{1{,}4 \times 287 \times 400}} = 0{,}2494$$

$$T_{T1} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 100 + \frac{400^2}{2 \times 1{,}005 \times 1000} = 405{,}0 \text{ K}$$

La quantità di calore q_c che, per unità di massa, l'aria scambia con l'esterno è funzione della differenza fra le temperature di ristagno nelle sezioni di ingresso e di uscita. Infatti, per la 12.54,

$$q_c = c_p \left(T_{T2} - T_{T1}\right)$$

La temperatura di ristagno adimensionale è funzione solo del numero di Mach, essendo, per la 12.67,

$$\frac{T_T}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}^2\left[2 + (k-1)\mathrm{Ma}^2\right]}{\left(1 + k\mathrm{Ma}^2\right)^2}$$

Rispettivamente, nella sezione di ingresso e in quella di uscita si ha

$$\frac{T_{T1}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2\left[2 + (k-1)\mathrm{Ma}_1^2\right]}{\left(1 + k\mathrm{Ma}_1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1{,}4+1) \times 0{,}2494^2 \times \left[2 + (1{,}4-1) \times 0{,}2494^2\right]}{\left(1 + 1{,}4 \times 0{,}2494^2\right)^2} =$$

$$= 0{,}2558$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_2^2\left[2+(k-1)\mathrm{Ma}_2^2\right]}{\left(1+k\mathrm{Ma}_2^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(1{,}4+1)\times 0{,}8^2\times\left[2+(1{,}4-1)\times 0{,}8^2\right]}{\left(1+1{,}4\times 0{,}8^2\right)^2} = 0{,}9639$$

per cui

$$T_{T2} = \frac{T_{T2}}{T_T^*}\,\frac{T_T^*}{T_{T1}}\,T_{T1} = \frac{0{,}9639}{0{,}2558}\times 405{,}0 = 1526\ \mathrm{K}$$

Conseguentemente, la quantità di calore ceduta all'aria risulta

$$q_c = c_p\,(T_{T2}-T_{T1}) = 1{,}005\times(1526-405) = 1126\ \mathrm{kJ/kg}$$

La massima quantità di calore che può essere trasferita all'aria senza ridurne la portata corrisponde al raggiungimento della condizione di moto soffocato nella sezione di uscita, condizione per la quale $\mathrm{Ma}_2 = 1$. In tal caso, per definizione, si ha

$$\frac{T_{T2}}{T_T^*} = 1$$

e, conseguentemente,

$$T_{T2} = \frac{T_{T2}}{T_T^*}\,\frac{T_T^*}{T_{T1}}\,T_{T1} = \frac{1}{0{,}2558}\times 405{,}0 = 1583\ \mathrm{K}$$

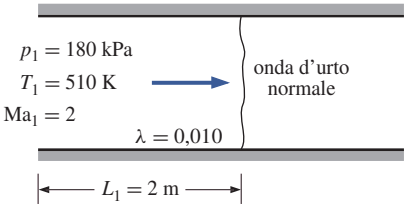
per cui la quantità di calore ceduta all'aria diviene

$$q_c = c_p\,(T_{T2}-T_{T1}) = 1{,}005\times(1583-405) = 1184\ \mathrm{kJ/kg}$$

Discussione Quella calcolata è la massima quantità di calore che può essere trasferita all'aria senza ridurne la portata. Infatti, se il fluido venisse ulteriormente riscaldato, la portata di massa diminuirebbe.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.81 Gas combusti con $R = 0{,}280$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}33$ defluiscono adiabaticamente in una condotta del diametro di 10 cm. Nella sezione di ingresso si ha $\mathrm{Ma}_1 = 2$, $T_1 = 510$ K e $p_1 = 180$ kPa. Alla distanza di 2 m dall'ingresso, si forma un'onda d'urto normale. Essendo l'indice di resistenza medio pari a 0,010, calcolare la velocità, la temperatura e la pressione nella sezione di uscita.



Ipotesi **1** Sono valide tutte le ipotesi che caratterizzano i flussi di Fanno (moto permanente, adiabatico e unidimensionale di un gas ideale con calori specifici costanti in una condotta a sezione costante). **2** L'indice di resistenza si mantiene costante lungo la condotta.

Proprietà Per i gas combusti la costante del gas e il rapporto tra i calori specifici valgono, rispettivamente, $R = 0{,}280$ kJ/(kg · K) e $k = 1{,}33$.

Analisi Per la 12.88, nella sezione di ingresso si ha

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 = \frac{1 - \mathrm{Ma}_1^2}{k\,\mathrm{Ma}_1^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2} =$$

$$= \frac{1 - 2{,}0^2}{1{,}4 \times 2{,}0^2} + \frac{2{,}4}{2 \times 1{,}4} \times \ln \frac{2{,}4 \times 2{,}0^2}{2 + 0{,}4 \times 2{,}0^2} = 0{,}3402 \text{ m}$$

Pertanto, lo stato sonico si raggiunge in una sezione posta ad una distanza dalla sezione di ingresso pari a

$$L_1^* = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 \frac{D_i}{\lambda_m} = 0{,}3402 \times \frac{0{,}10}{0{,}010} = 3{,}40 \text{ m}$$

Tale distanza è maggiore della distanza $L_2 = 2$ m della sezione in corrispondenza della quale si forma l'onda d'urto. Pertanto, il moto a monte dell'onda d'urto è effettivamente supersonico. Per la 12.89, se $L = L_2 - L_1$ è la lunghezza del tratto compreso fra le sezioni 1 e 2 nelle quali il numero di Mach assume i valori Ma_1 e Ma_2, si ha

$$\left(\frac{\lambda_m L}{D_i}\right) = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2$$

Nella sezione subito a monte dell'onda d'urto, essendo $L = L_2 - L_1 = 2 - 0 = 2$ m, si ha

$$\frac{\lambda_m L}{D_i} = \frac{0{,}010 \times 2}{0{,}10} = 0{,}20$$

e, per la 12.89,

$$\left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_2 = \left(\frac{\lambda_m L^*}{D_i}\right)_1 - \left(\frac{\lambda_m L}{D_i}\right) = 0{,}3402 - 0{,}200 = 0{,}1402$$

In corrispondenza di tale valore la 12.88 risulta soddisfatta per $\mathrm{Ma}_2 = 1{,}476$. Scrivendo la 12.91, rispettivamente, per la sezione 1 e per la sezione 2 e dividendo membro a membro, si ottiene

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

da cui

$$T_2 = T_1 \frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2} = 510 \times \frac{2 + 0{,}33 \times 2{,}0^2}{2 + 0{,}33 \times 1{,}476^2} = 622{,}7 \text{ K}$$

Analogamente, dalla 12.90

$$p_2 = p_1 \frac{\mathrm{Ma}_1}{\mathrm{Ma}_2} \sqrt{\frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}} =$$

$$= 180 \times \frac{2{,}0}{1{,}476} \times \sqrt{\frac{2 + (1{,}33-1) \times 2{,}0^2}{2 + (1{,}33-1) \times 1{,}476^2}} = 269{,}5 \text{ kPa}$$

Per la 12.38, il numero di Mach Ma_3 subito a valle dell'onda d'urto è

$$\mathrm{Ma}_3 = \sqrt{\frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_2^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_2^2 - k + 1}} = \sqrt{\frac{0{,}33 \times 1{,}476^2 + 2}{2 \times 1{,}33 \times 1{,}476^2 - 0{,}33}} = 0{,}7053$$

Rispettivamente, per la 12.37 e la 12.34, la pressione e la temperatura risultano

$$p_3 = p_2 \frac{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}{1 + k\mathrm{Ma}_3^2} = 269{,}5 \times \frac{1 + 1{,}33 \times 1{,}476^2}{1 + 1{,}33 \times 0{,}7053^2} = 632{,}1 \text{ kPa}$$

$$T_3 = T_2 \frac{1 + \mathrm{Ma}_2^2\,(k-1)/2}{1 + \mathrm{Ma}_3^2\,(k-1)/2} = 622{,}7 \times \frac{1 + 1{,}476^2 \times 0{,}33/2}{1 + 0{,}7053^2 \times 0{,}33/2} =$$

$$= 782{,}3 \text{ K}$$

A valle dell'onda d'urto, si ha ancora un flusso di Fanno fino alla sezione di uscita 4, dove il moto è sonico. Pertanto, scrivendo la 12.91 per la sezione 3 e per la sezione 4 e dividendo membro a membro, si ottiene il rapporto fra le due temperature, da cui

$$T_4 = T_3 \frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_3^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_4^2} = 782{,}3 \times \frac{2 + 0{,}33 \times 0{,}7053^2}{2 + 0{,}33 \times 1^2} = 727 \text{ K}$$

Analogamente, dalla 12.90,

$$p_4 = p_3 \frac{\mathrm{Ma}_3}{\mathrm{Ma}_4} \sqrt{\frac{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_3^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_4^2}} =$$

$$= 632{,}1 \times \frac{0{,}7053}{1} \times \sqrt{\frac{2 + (1{,}33-1) \times 0{,}7053^2}{2 + (1{,}33-1) \times 1^2}} = 430 \text{ kPa}$$

La velocità, infine, risulta

$$V_4 = \mathrm{Ma}_4\, c_4 = \mathrm{Ma}_4 \sqrt{kRT_4} = 1 \times \sqrt{1{,}33 \times 280 \times 727} = 520 \text{ m/s}$$

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.

12.82 Esprimere il rapporto tra la pressione di ristagno a valle di un'onda d'urto e la pressione statica a monte in funzione di k e del numero di Mach di monte Ma_1.

Analisi A valle dell'onda d'urto, per la 12.20, il rapporto tra la pressione di ristagno p_{T2} e la pressione statica p_2, è

$$\frac{p_{T2}}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

Per la 12.37, essendo p_1 la pressione statica a monte dell'onda d'urto, si ha

$$p_2 = p_1\,\frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}$$

Sostituendo nella precedente, si ottiene

$$\frac{p_{T2}}{p_1} = \frac{1 + k\mathrm{Ma}_1^2}{1 + k\mathrm{Ma}_2^2}\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

ed, essendo, per la 12.38,

$$\mathrm{Ma}_2^2 = \frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1}$$

si ha, infine,

$$\frac{p_{T2}}{p_1} =$$

$$= \frac{(1 + k\mathrm{Ma}_1^2)(2k\mathrm{Ma}_1^2 - k + 1)}{(k\mathrm{Ma}_1^2 + 1)(k+1)}\left[1 + \frac{(k-1)\mathrm{Ma}_1^2/2 + 1}{2k\mathrm{Ma}_1^2/(k-1) - 1}\right]^{k/(k-1)}$$

Discussione In maniera analoga, si possono ottenere altri rapporti tra i parametri a monte e a valle dell'onda d'urto.

Copyright © 2015, 2011, 2008 McGraw-Hill Education (Italy), S.r.l.